ZEITSCHRIFT

FÜR

PHYSIK UND MATHEMATIK.

I.

Leichtes Verfahren, die Gleichungen zwischen den Kanten der einfachen Gestalten des tessularischen Krystallsystemes darzustellen;

von

A. v. Ettingshausen.

1.

Die im höchsten Grade lehrreichen Vorlesungen, welche Herr Professor *Mohs* an dem k. k. Hof-Mineralien-Cabinette hält, und denen beizuwohnen ich gegenwärtig das Vergnügen genieſse, veranlaſsten mich, zu meiner eigenen Belehrung, den Zusammenhang, welcher zwischen den Kanten (Neigungswinkeln der Flächen) der einfachen tessularischen Gestalten obwaltet, durch Rechnung zu untersuchen. Obgleich dieſs keiner Schwierigkeit unterliegt, sobald man die zu suchenden Gröſsen mit den gegebenen durch eine, dem vorliegenden Falle angemessene, Kette ebener und sphärischer Dreiecke verbindet; so dürfte dennoch das, zu dem angeführten Zwecke, von mir gewählte Verfahren, durch welches man die oft lästige Betrachtung dieser Dreiecke gänzlich vermeidet, und alle Fälle einem gleichförmigen Calcul unterwirft, der Aufmerksamkeit der Krystallographen nicht unwerth seyn, weſswegen ich dasselbe in gegenwärtigem Aufsatze vortrage.

2.

Dieses Verfahren gründet sich einerseits auf nachstehende allgemein bekannte geometrische Sätze:

α) Der Winkel, unter welchem zwei Ebenen zusammenstofsen, ergänzt den Winkel, welchen die aus einem, innerhalb des ersteren Winkels gewählten, Puncte auf diese Ebenen geführten Perpendikel mit einander bilden, zu zwei Rechten.

β) Der Cosinus des Winkels zweier aus einem Puncte auslaufender Geraden ist der Summe der drei Producte aus den Cosinussen der beiden Winkel gleich, unter welchen diese Geraden gegen jede dreier in genanntem Puncte wechselweise auf einander senkrecht stehender gerader Linien geneigt sind.

γ) Die Summe der Quadrate der Cosinusse der Winkel, welche eine Gerade mit drei anderen, einander wechselweise senkrecht durchschneidenden Geraden darstellt, ist dem Quadrate des Halbmessers, d. i. der Einheit gleich.

Andererseits aber gründet sich erwähntes Verfahren auf die allen einfachen tessularischen Gestalten, ihrem Ursprunge gemäfs, gemeinschaftlich zukommende Eigenschaft:

δ) dafs sämmtliche Grenzflächen einer solchen Gestalt gegen die drei in ihrem Mittelpuncte wechselweise auf einander senkrechten geraden Linien, in welchen die pyramidalen Axen eines Hexaëders liegen, dessen rhomboëdrische Axen mit den rhomboëdrischen Axen der Gestalt zusammenfallen, einerlei Lage haben *).

---

*) Die Beschreibung der Gestalten, von denen hier die Rede ist, findet man in den §§. 57—77, und die Erklärung der unter denselben bestehenden Verbindung in den §§.

Ich werde im Folgenden die so eben erwähnten drei im Mittelpuncte jeder tessularischen Gestalt einander wechselweise unter rechten Winkeln durchkreuzenden Geraden, welche stets entweder durch Mittelpuncte der Flächen, oder durch Ecke, oder durch Halbirungspuncte der Kantenlinien gehen, und bei den ganzen einfachen Gestalten als pyramidale, bei ihren Hälften als prismatische, und bei den Vierteln als hemiprismatische Axen erscheinen, geradezu die *Axen* der zu betrachtenden Gestalt nennen. Vielleicht wäre es nicht unschicklich, dieselben, aufser den angeführten, noch mit dem gemeinschaftlichen Namen: *tessularische Axen*, zu belegen.

3.

Der in δ) angegebenen Eigenschaft der einfachen tessularischen Gestalten zu Folge, bildet jedes der aus dem Mittelpuncte einer solchen Gestalt auf ihre Grenzflächen fallenden Perpendikel mit den drei Axen, in so ferne man unter diesen Axen keinen Unterschied macht, die nämlichen drei Winkel. Die verschiedenen Grenzflächen der Gestalt unterscheiden sich blofs dadurch, dafs die ihnen correspondirenden Perpendikel die drei festgesetzten Winkel nicht durchgehends mit den nämlichen Axen, oder wenigstens nicht mit den nämlichen der durch den Mittelpunct von einander gesonderten Theile dieser Axen darstellen.

Fassen wir, um bei der Angabe dieser Winkel jede Zweideutigkeit auszuschliefsen, von jeder der drei Axen nur einen, während der ganzen Untersuchung unabänderlich beizubehaltenden ihrer beiden, im Mittelpuncte der Gestalt geschiedenen Theile, welchen wir den *Haupt-*

---

119 — 134 des ersten Theiles des *Grundrisses der Mineralogie* von *F. Mohs*, auf welchen ich defshalb verweise.

theil dieser Axe nennen wollen, in das Auge, und setzen wir unter den Axen selbst eine gewisse Ordnung fest, in der stets die auf dieselben sich beziehenden Winkel anzugeben sind; so erscheinen die Winkel, welche die aus dem Mittelpuncte einer einfachen tessularischen Gestalt auf ihre Grenzflächen gefällten Perpendikel mit den Axen bilden, bei verschiedenen Perpendikeln theils unter einander, theils überdieſs noch mit ihren Ergänzungen zu zwei Rechten verwechselt. Sind also a, b, c die, mit gehöriger Rücksicht auf ihre Zeichen genommenen Cosinusse der Winkel, unter welchen das auf irgend eine Grenzfläche der Gestalt fallende Perpendikel gegen die Haupttheile der drei Axen geneigt ist, und a', b', c' dieselben Gröſsen in Beziehung auf eine andere Grenzfläche, so kommen den Cosinussen a', b', c' die Werthe $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$ in einer Ordnung und mit Zeichen zu, welche von der Lage der zweiten Fläche rücksichtlich der ersten abhängen, und, wie die Folge lehren wird, in jedem einzelnen Falle sich leicht angeben lassen.

Der Cosinus des Winkels der Perpendikel, welche beiden Grenzflächen der Gestalt correspondiren, wird (2. β) durch $aa' + bb' + cc'$ ausgedrückt; bezeichnet man daher den Cosinus des Winkels, unter welchen beide Grenzflächen, nöthigen Falls erweitert, zum Durchschnitte kommen, durch A, so hat man wegen 2. α)

$$(1) \qquad A = -(aa' + bb' + cc'),$$

wobei wegen 3. γ) zwischen den Gröſsen a, b, c die Gleichung

$$(2) \qquad a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

besteht.

Es kann also im Allgemeinen der Cosinus des Winkels jeder zwei Grenzflächen einer einfachen tessulari-

schen Gestalt mit Hülfe der Gleichung (1) durch die nämlichen drei Gröſsen a, b, c, und weil diese Gröſsen durch die Gleichung (2) mit einander verknüpft sind, durch zwei beliebige dieser Gröſsen ausgedrückt werden, woraus hervorgeht, daſs man im Allgemeinen die Neigung jeder zwei Grenzflächen einer einfachen tessularischen Gestalt durch die Winkel, welche von zwei Paaren der übrigen Grenzflächen gebildet werden, anzugeben im Stande ist. Diese gegenseitige Abhängigkeit der Neigungen der Grenzflächen gegen einander wird aber noch einfacher, wenn die Gröſsen a, b, c, der besonderen Beschaffenheit einer Gestalt zu Folge, näher bestimmt werden können.

4.

Jede einfache tessularische Gestalt ist entweder ein Tetrakontaoktaëder, oder in einem Tetrakontaoktaëder als Hälfte oder Viertel enthalten, oder sie geht aus einer dieser Gestalten dadurch hervor, daſs sämmtliche Kanten einer gewissen Art die Gröſse zweier rechter Winkel erreichen, indem die in diesen Kanten sich begegnenden Grenzflächen in eine Ebene fallen. Ich will daher allen folgenden Rechnungen die Betrachtung irgend eines Tetrakontaoktaëders zu Grunde legen.

Um die ihrer Lage nach verschiedenen Grenzflächen eines Tetrakontaoktaëders auf eine leichte Weise kenntlich zu machen, ist es nöthig, die Ecke dieser Gestalt faſslich zu bezeichnen. Man bringe zu diesem Ende das zu betrachtende Tetrakontaoktaëder in eine solche Lage, daſs die erste seiner drei (pyramidalen) Axen vertical steht und ihr Haupttheil *aufwärts* gerichtet ist, ferner von den beiden anderen, nunmehr horizontalen, Axen der Haupttheil der zweiten *vorwärts*, und der Haupttheil der dritten *rechts* zu liegen kommt, so erscheint

eines der sechs pyramidalen (achtflächigen) Ecke der Gestalt oben, eines unten, eines vorne, eines hinten, eines rechts, eines links, weſswegen man diese Ecke füglich durch die Buchstaben

O, *U*, *V*, *H*, *R*, *L*

anzeigen kann. Was die acht rhomboëdrischen (sechsflächigen) Ecke betrifft, so erscheint eines in der Mitte des oberen, vorderen, rechten Achttheiles der Gestalt, also kurz zu sprechen, oben, vorne und rechts; ein zweites unten, vorne und rechts; ein drittes oben, hinten und rechts; u. s. w. Daher erhalten diese Ecke die Zeichen

OVR, *UVR*, *OHR*, *UHR*, *OVL*, *UVL*, *OHL*, *UHL*.

Endlich befindet sich eines der zwölf prismatischen (vierflächigen) Ecke oben und vorne, ein zweites unten und vorne, ein drittes oben und hinten, u. s. w. Daher sich diese Ecke bequem durch die Zeichen

OV, *UV*, *OH*, *UH*, *OR*, *UR*, *OL*, *UL*, *VR*, *HR*, *VL*, *HL*

vorstellen lassen.

Um eine Seitenfläche des Tetrakontaoktaëders anzudeuten, ist nichts weiter erforderlich, als die Eckpuncte, welche an ihr vorkommen, zu nennen. Sie wird hiedurch von den übrigen Seitenflächen deutlich unterschieden. So gehört z. B. dem Ecke des in der 35sten Figur des ersten Theiles des Grundrisses der Mineralogie vorgestellten Tetrakontaoktaëders, woran sich der Buchstabe *c* befindet, das Zeichen *V*, und den Ecken, woran die Buchstaben *b*, *a* stehen, die Zeichen *OVR*, *OV*; man kann also das Dreieck *a b c* genannter Figur durch das Zeichen (*V*, *OVR*, *OV*) vorstellen.

5.

Sind die Cosinusse der Winkel gegeben, unter welchen das aus dem Mittelpuncte des Tetrakontaoktaëders

auf irgend eine bestimmte Seitenfläche gefällte Perpendikel gegen die, obiger Annahme zu Folge, in *O*, *V*, *R* sich endigenden, Haupttheile der drei Axen geneigt ist, und man will die Cosinusse dieser Winkel für eine andere ebenfalls bestimmte Seitenfläche wissen, so drücke man beide Seitenflächen durch die ihnen entsprechenden Symbole aus, und untersuche, welche Änderungen mit den Buchstaben *O*, *U*, *V*, *H*, *R*, *L* in dem Zeichen der ersten Seitenfläche vorgenommen werden müssen, um dieses in das Zeichen der zweiten Seitenfläche umzuwandeln. Man beziehe den ersten der gegebenen Cosinusse, seinem numerischen Werthe nach, auf die Buchstaben *O* und *U*; den zweiten dieser Cosinusse auf *V* und *H*, und den dritten auf *R* und *L*, und nehme mit diesen Cosinussen, ohne die ihnen vorgesetzten Zeichen + oder — zu beachten, in Absicht auf die Ordnung, in welcher sie gegeben sind, alle den oben erwähnten Änderungen der Buchstaben *O*, *U*, *V*, *H*, *R*, *L* entsprechenden Verwechslungen vor, so hat man die numerischen Werthe der verlangten Cosinusse. Ihre Zeichen werden durch die Regel bestimmt, dafs der an der ersten, zweiten, dritten Stelle stehende Cosinus positiv oder negativ seyn mufs, je nachdem in dem Symbole der Seitenfläche, für welche diese Gröfsen gelten, einer der Buchstaben *O*, *V*, *R*, oder einer der Buchstaben *U*, *H*, *L* erscheint. Die Richtigkeit dieser Vorschrift erhellet leicht aus 2. δ) und 3.

6.

Wir wollen allen künftigen Rechnungen die Cosinusse der Winkel zu Grunde legen, welche das aus dem Mittelpuncte des Tetrakontaoktaëders auf die Seitenfläche (*O*, *OVR*, *OV*) gefällte Perpendikel mit den Haupttheilen der Axen darstellt, und diese Cosinusse

durch a, b, c andeuten. Bei dieser Annahme sind, wie man leicht sieht, a, b, c positive Zahlen, und zwar ist $a > b > c$. Welche Cosinusse den übrigen Seitenflächen correspondiren, weiset nachstehende Tabelle aus, in welcher die um die pyramidalen Ecke der Gestalt herumliegende Flächen gruppenweise zusammengestellt erscheinen.

Seitenfläche.	Cosinusse.	Seitenfläche.	Cosinusse.
O, *OVR*, *OV*	*a*, *b*, *c*	*U*, *UVR*, *UV*	—*a*, *b*, *c*
O, *OVR*, *OR*	*a*, *c*, *b*	*U*, *UVR*, *UR*	—*a*, *c*, *b*
O, *OHR*, *OR*	*a*, —*c*, *b*	*U*, *UHR*, *UR*	—*a*, —*c*, *b*
O, *OHR*, *OH*	*a*, —*b*, *c*	*U*, *UHR*, *UH*	—*a*, —*b*, *c*
O, *OHL*, *OH*	*a*, —*b*, —*c*	*U*, *UHL*, *UH*	—*a*, —*b*, —*c*
O, *OHL*, *OL*	*a*, —*c*, —*b*	*U*, *UHL*, *UL*	—*a*, —*c*, —*b*
O, *OVL*, *OL*	*a*, *c*, —*b*	*U*, *UVL*, *UL*	—*a*, *c*, —*b*
O, *OVL*, *OV*	*a*, *b*, —*c*	*U*, *UVL*, *UV*	—*a*, *b*, —*c*
V, *OVR*, *OV*	*b*, *a*, *c*	*H*, *OHR*, *OH*	*b*, —*a*, *c*
V, *OVR*, *VR*	*c*, *a*, *b*	*H*, *OHR*, *HR*	*c*, —*a*, *b*
V, *UVR*, *VR*	—*c*, *a*, *b*	*H*, *UHR*, *HR*	—*c*, —*a*, *b*
V, *UVR*, *UV*	—*b*, *a*, *c*	*H*, *UHR*, *UH*	—*b*, —*a*, *c*
V, *UVL*, *UV*	—*b*, *a*, —*c*	*H*, *UHL*, *UH*	—*b*, —*a*, —*c*
V, *UVL*, *VL*	—*c*, *a*, —*b*	*H*, *UHL*, *HL*	—*c*, —*a*, —*b*
V, *OVL*, *VL*	*c*, *a*, —*b*	*H*, *OHL*, *HL*	*c*, —*a*, —*b*
V, *OVL*, *OV*	*b*, *a*, —*c*	*H*, *OHL*, *OH*	*b*, —*a*, —*c*
R, *OVR*, *VR*	*c*, *b*, *a*	*L*, *OVL*, *VL*	*c*, *b*, —*a*
R, *OVR*, *OR*	*b*, *c*, *a*	*L*, *OVL*, *OL*	*b*, *c*, —*a*
R, *OHR*, *OR*	*b*, —*c*, *a*	*L*, *OHL*, *OL*	*b*, —*c*, —*a*
R, *OHR*, *HR*	*c*, —*b*, *a*	*L*, *OHL*, *HL*	*c*, —*b*, —*a*
R, *UHR*, *HR*	—*c*, —*b*, *a*	*L*, *UHL*, *HL*	—*c*, —*b*, —*a*
R, *UHR*, *UR*	—*b*, —*c*, *a*	*L*, *UHL*, *UL*	—*b*, —*c*, —*a*
R, *UVR*, *UR*	—*b*, *c*, *a*	*L*, *UVL*, *UL*	—*b*, *c*, —*a*
R, *UVR*, *VR*	—*c*, *b*, *a*	*L*, *UVL*, *VL*	—*c*, *b*, —*a*

7.

I. Fassen wir irgend eine der Grenzflächen eines Tetrakontaoktaëders, z. B. die in der 35sten Figur des Grundrisses der Miner. 1. Thl. mit Buchstaben bezeichnete, in das Auge. Ihr entspricht das Zeichen

(V, OVR, OV),

und das aus dem Mittelpuncte der Gestalt auf diese Fläche fallende Perpendikel bildet mit den Hauptheilen der drei pyramidalen Axen Winkel, deren Cosinusse, der in 6. gemachten Voraussetzung gemäſs, wie die dort gegebene Tabelle zeigt,

$$b, \ a, \ c$$

sind. Die Flächen, welche sich an die so eben genannte anschlieſsen, sind

(V, OVR, VR); (V, OVL, OV); (O, OVR, OV);

und ihren Perpendikeln entsprechen die Cosinusse

c, a, b; $b, a, -c$; a, b, c.

Heiſsen nun die Cosinusse der Kanten, welche die drei letzteren Flächen mit der ersten, der Reihe nach bilden, in Übereinstimmung mit der Bezeichnung der angeführten Figur A, B, C, so bestehen, vermöge der oben gegebenen Formel (1), die Gleichungen

$$(3) \quad \begin{cases} A = -(a^2 + 2bc), \\ B = -(a^2 + b^2 - c^2), \\ C = -(2ab + c^2). \end{cases}$$

II. Allein die Fläche (V, OVR, OV) des vorliegenden Tetrakontaoktaëders kann offenbar auch als ein Theil der Begrenzung eines tetraëdrischen Trigonal-Ikositetraëders, ferner eben so als ein Theil einer Grenzfläche eines dreikantigen Tetragonal-Ikositetraëders, eines Pentagonal-Ikositetraëders, oder eines tetraëdrischen Pentagonal-Dodekaëders betrachtet werden.

Die Flächen des Tetrakontaoktaëders, welche mit der Fläche (O, OVR, OV), gehörig erweitert, die Kanten eines *tetraëdrischen Trigonal-Ikositetraëders* hervorbringen, sind, wie aus der im Grundrisse der Mineralogie gegebenen Theorie der Zerlegung des Tetrakonta-

oktaëders erhellet, und durch Vergleichung der 26sten Figur des Grundrisses d. M. mit der 35sten anschaulich gemacht werden kann,

(V, UVL, VL); (O, OVR, OV); (V, OVR, VR);

und denselben correspondiren die Cosinusse

$-c, a, -b$; a, b, c; c, a, b.

Nennt man die Cosinusse der durch diese Flächen mit (V, OVR, OV) hervorgebrachten Kanten, in Übereinstimmung mit der Bezeichnung der 26sten Figur, A_1, B_1, C_1, so ergeben sich die Gleichungen

$$(4)\quad \begin{cases} A_1 = -(a^2 - 2bc), \\ B_1 = -(2ab + c^2), \\ C_1 = -(a^2 + 2bc). \end{cases}$$

III. In so ferne (V, OVR, OV) als Theil der Begrenzung eines *dreikantigen Tetragonal-Ikositetraëders* betrachtet wird, sind die mit dieser zum Durchschnitte kommenden Nachbarflächen (vergl. die 32ste Figur des Grundr. d. M. mit der 35sten)

(V, OVL, OV); (V, UVR, UV); (O, OVR, OR); (R, OVR, VR)

welchen die Cosinusse

$b, a, -c$; $-b, a, c$; a, c, b; c, b, a

gehören. Wie man mit Hülfe der Formel (1) sieht, können nur die Kanten, welche die drei ersteren mit (V, OVR, OV) erzeugen, unter einander verschieden seyn. Ihre Cosinusse sollen in Übereinstimmung mit der Bezeichnung der 31sten Figur des Grundrisses der Mineralogie A_2, B_2, C_2 heifsen, und somit bestehen die Gleichungen

$$(5)\quad \begin{cases} A_2 = -(a^2 + b^2 - c^2), \\ B_2 = -(a^2 - b^2 + c^2), \\ C_2 = -(ab + ac + bc). \end{cases}$$

Die durch die vierte Nachbarfläche mit (V, OVR, OV)

hervorgebrachte Kante ist der dritten unter den so eben angeführten Kanten gleich.

IV. Sieht man die Fläche (V, OVR, OV) eines Tetrakontaoktaëders als einen Theil der Begrenzung eines *Pentagonal-Ikositetraëders* an, so sind die Nachbarflächen (Grundr. Fig. 34)

$$(V, OVL, VL); \quad (V, UVR, VR); \quad (R, OVR, VR); \quad (O, OVR, OR); \quad (O, OVL, OV);$$

und die ihnen correspondirenden Cosinusse

$$c, a, -b; \quad -c, a, b; \quad c, b, a; \quad a, c, b; \quad a, b, -c.$$

Stellen nun A_3, B_3, C_3 die Cosinusse der Kanten vor, welche die erste oder zweite, die dritte oder vierte, und die fünfte dieser Flächen mit (V, OVR, OV) zu Stande bringen, so hat man

$$(6) \quad \begin{cases} A_3 = -a^2, \\ B_3 = -(ab + ac + bc), \\ C_3 = -(2ab - c^2). \end{cases}$$

V. Wird endlich die Fläche (V, OVR, OV) auf ein *tetraëdrisches Pentagonal-Dodekaëder* bezogen, so bieten sich als Nachbarflächen dar (vergl. Grundr. Fig. 23 mit 35):

$$(R, OVR, VR); \quad (O, OVR, OR); \quad (O, OHL, OL); \quad (L, UVL, VL); \quad (V, UVL, UV);$$

und diesen gehören die Cosinusse

$$c, b, a; \quad a, c, b; \quad a, -c, -b; \quad -c, b, -a; \quad -b, a, -c.$$

Sind A_4, B_4, C_4 die Cosinusse der Kanten, in welchen (V, OVR, OV) von der ersten oder zweiten, von der dritten oder vierten, und von der fünften dieser Flächen geschnitten wird, so ergeben sich die Gleichungen:

$$(7)\quad \begin{cases} A_4 = -(ab + ac + bc), \\ B_4 = -(ab - ac - bc), \\ C_4 = -(a^2 - b^2 - c^2). \end{cases}$$

Die Vergleichung der hier gefundenen Ausdrücke lehrt, daſs

$$A = C_1,\quad B = A_2,\quad C = B_1,\quad C_2 = B_3 = A_4$$

ist, wie es die Zerlegung des Tetrakontaoktaëders mit sich bringt.

Verbindet man zwei beliebige und unter einander verschiedene dieser Gleichungen mit der oben angeführten Gleichung

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

so ist man, indem man zugleich berücksichtiget, daſs $a > b$ und $b > c$ seyn muſs, jederzeit im Stande, die Cosinusse a, b, c durch diejenigen zwei unter den Cosinussen A, B, C, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, etc., welche in den gewählten Gleichungen erscheinen, unzweideutig zu bestimmen, und folglich, wenn man die für a, b, c erhaltenen Werthe in die übrigen Gleichungen einführt, auch die Werthe aller übrigen unter den erwähnten Cosinussen anzugeben. Man sieht also hieraus, daſs es jederzeit angeht, aus zwei wie immer gewählten Kanten der in einem Tetrakontaoktaëder enthaltenen tessularischen Gestalten, wenn diese Kanten nur nicht nothwendig identisch sind, alle anderen Kanten genannter Gestalten zu berechnen.

Nachstehende Beispiele sollen dieſs erläutern.

8.

Erste Aufgabe. Es seyen zwei Kanten eines Tetrakontaoktaëders gegeben, man soll die dritte Kante dieser Gestalt und die Kanten aller in ihr enthaltenen tessularischen Gestalten (der Hälften und Viertel) ausmitteln.

Auflösung. 1. *Fall.* Es seyen die Kanten gegeben, welche die achtflächigen Ecke des Tetrakontaoktaëders mit den übrigen Ecken, nämlich mit den sechsflächigen und mit den vierflächigen, verbinden. Da wir die Cosinusse der hier als gegeben zu betrachtenden Kanten oben A und B genannt haben, so sind die Gleichungen

$$a^2 + 2bc = -A,$$
$$a^2 + b^2 - c^2 = -B,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

in Bezug auf a, b, c aufzulösen.

Zieht man die zweite dieser Gleichungen von der dritten ab, so ergibt sich $2c^2 = 1 + B$, und hieraus

$$c = \sqrt{\frac{1+B}{2}}.$$

Durch Subtraction der ersten Gleichung von der dritten erhält man ferner $b^2 - 2bc + c^2 = 1 + A$, mithin, wegen $b > c$

$$b - c = \sqrt{1 + A},$$

$$\text{also} \quad b = \sqrt{1+A} + \sqrt{\frac{1+B}{2}}.$$

Endlich ist vermöge der ersten obiger Gleichungen $a = \sqrt{-A - 2bc}$, folglich

$$a = \sqrt{-(1 + A + B) - 2\sqrt{(1+A)\left(\frac{1+B}{2}\right)}}.$$

Substituirt man diese Werthe für a, b, c in die in 7. erhaltenen Gleichungen, so findet man den Cosinus der dritten Kante des Tetrakontaoktaëders, d. i.

$$C = -\left(\frac{1+B}{2}\right) - 2\left[\sqrt{1+A} + \sqrt{\frac{1+B}{2}}\right] \times$$
$$\times \sqrt{-(1 + A + B) - 2\sqrt{(1+A)\left(\frac{1+B}{2}\right)}};$$

ferner die Cosinusse der Kanten des in diesem Tetra-

kontaoktaëder enthaltenen tetraëdrischen Trigonal-Ikositetraëders, nämlich

$$A_1 = A + 2\left[1 + B + 2\sqrt{(1+A)\left(\frac{1+B}{2}\right)}\right],$$

$$B_1 = C, \quad C_1 = A;$$

eben so die Cosinusse der Kanten des dreikantigen Tetragonal-Ikositetraëders, nämlich

$$A_2 = B, \quad B_2 = 2 + 2A + B + 4\sqrt{(1+A)\left(\frac{1+B}{2}\right)},$$

$$C_2 = -\left(\frac{1+B}{2}\right) - \sqrt{(1+A)\left(\frac{1+B}{2}\right)}$$

$$- \left[\sqrt{1+A} + 2\sqrt{\frac{1+B}{2}}\right] \times$$

$$\times \sqrt{-(1+A+B) - 2\sqrt{(1+A)\left(\frac{1+B}{2}\right)}}$$

u. s. w., welche Formeln, da sie mittelst der bekannten Werthe von a, b, c leicht darstellbar sind, ich hier fortzusetzen nicht für nöthig erachte, zumal, da es beim practischen Gebrauche bequemer seyn dürfte, zuerst a, b, c zu berechnen, und die gefundenen numerischen Resultate zur weiteren Berechnung von C, A_1, B_2, C_2 u. s. w., nach den in 7. erhaltenen Gleichungen, zu verwenden.

Dafs man, wenn die Cosinusse A, B nicht unmittelbar gegeben sind (für die in der Natur erscheinenden einfachen tessularischen Gestalten lassen sich die Cosinusse der Kanten durchgehends, wenn nicht genau, doch wenigstens näherungsweise, durch einfache rationale Brüche darstellen), statt des Radicals $\sqrt{\frac{1+B}{2}}$ den Cosinus der Hälfte des Winkels, worauf sich B bezieht, und in gleicher Absicht statt des Radicals $\sqrt{1+A}$ das ihm gleichgeltende $\sqrt{2} \,.\, \sqrt{\frac{1+A}{2}}$

in die Rechnung einzuführen, und überhaupt alle Formeln mit Hülfe der zwischen den Kreisfunctionen bestehenden Relationen möglichst zusammen zu ziehen oder nach Bedürfnifs zur Anwendung der Logarithmen geschickt zu machen habe, bedarf keiner weiteren Erläuterung. Ich begnüge mich daher damit, nur noch darauf aufmerksam zu machen, dafs es in letzterer Hinsicht vortheilhaft seyn dürfte, nur diejenigen zwei der Cosinusse a, b, c, deren Formeln man zur Rechnung am geeignetsten hält, unmittelbar durch die gegebenen Gröfsen zu suchen, und den dritten dieser Cosinusse mittelst der Bemerkung zu entwickeln, dafs im Allgemeinen aus der Gleichung $\cos.\alpha^2 + \cos.\beta^2 + \cos.\gamma^2 = 1$

$$\cos.\alpha = \sqrt{-\cos.(\beta+\gamma)\,.\,\cos.(\beta-\gamma)}$$

folgt.

2. *Fall.* Es seyen die Kanten, welche in den sechsflächigen Ecken des Tetrakontaoktaëders zusammenstossen, also die Cosinusse A, C gegeben.

Hier hat man es mit den Gleichungen

$$a^2 + 2bc = -A,$$
$$2ab + c^2 = -C,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

zu thun. Aus der ersten und dritten folgt, wie im vorigen Falle

$$b - c = \sqrt{1 + A},$$

und aus der zweiten und dritten auf ähnliche Weise

$$a - b = \sqrt{1 + C},$$

wefswegen auch

$$a - c = \sqrt{1 + A} + \sqrt{1 + C}$$

ist. Zieht man die Summe der Quadrate dieser drei Resultate von

$$3(a^2 + b^2 + c^2) = 3$$

ab, so ergibt sich

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc =$$
$$= -(1 + 2A + 2C) - 2\sqrt{(1 + A)(1 + C)},$$

mithin

$$a + b + c = \sqrt{-(1 + 2A + 2C) - 2\sqrt{(1 + A)(1 + C)}}.$$

Nun unterliegt die Bestimmung von a, b, c keiner Schwierigkeit. Man findet

$$a = \tfrac{1}{3}\sqrt{1 + A} + \tfrac{2}{3}\sqrt{1 + C}$$
$$+ \tfrac{1}{3}\sqrt{-(1 + 2A + 2C) - 2\sqrt{(1 + A)(1 + C)}},$$

$$b = \tfrac{1}{3}\sqrt{1 + A} - \tfrac{1}{3}\sqrt{1 + C}$$
$$+ \tfrac{1}{3}\sqrt{-(1 + 2A) + 2C) - 2\sqrt{(1 + A)(1 + C)}},$$

$$c = -\tfrac{2}{3}\sqrt{1 + A} - \tfrac{1}{3}\sqrt{1 + C},$$
$$+ \tfrac{1}{3}\sqrt{-(1 + 2A + 2C) - 2\sqrt{(1 + A)(1 + C)}},$$

und hiedurch sind auch die Werthe von B, A_1, B_1, C_1, A_2, etc. bekannt.

3. *Fall.* Es seyen die in den vierflächigen Ecken des Tetrakontaoktaëders sich vereinigenden Kanten, welchen die Cosinusse B, C zugehören, gegeben.

Die zur Rechnung nöthigen Gleichungen sind:

$$a^2 + b^2 - c^2 = -B,$$
$$2ab + c^2 = -C,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Aus der ersten und dritten folgt

$$c = \sqrt{\frac{1 + B}{2}},$$

und aus der zweiten und dritten

$$a - b = \sqrt{1 + C},$$

daher ist

$$2ab = -C - c^2 = -C - \left(\frac{1 + B}{2}\right),$$

mithin

$$a + b = \sqrt{(a-b)^2 + 4ab} = \sqrt{-B-C},$$

woraus man

$$a = \tfrac{1}{2}(\sqrt{-B-C} + \sqrt{1+C}),$$
$$b = \tfrac{1}{2}(\sqrt{-B-C} - \sqrt{1+C})$$

erhält.

9.

Zweite Aufgabe. Aus zwei Kanten eines dreikantigen Tetragonal-Ikositetraëders die dritte Kante dieser Gestalt und die Kanten aller übrigen mit ihr in Verbindung stehenden Gestalten zu bestimmen.

Auflösung. 1. *Fall.* Es seyen die beiden Kanten gegeben, welche jedes der zweikantigen vierflächigen Ecke mit den benachbarten dreikantigen verbinden, und deren Cosinusse wir, die 31ste Figur des Grundrisses der Mineral. vor Augen habend, A_2 und B_2 nannten.

Die Gleichungen, aus welchen die Werthe von a, b, c erhalten werden, sind jetzt

$$a^2 + b^2 - c^2 = - A_2,$$
$$a^2 - b^2 + c^2 = - B_2,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

welche sogleich

$$a = \sqrt{\frac{-A_2 - B_2}{2}},\quad b = \sqrt{\frac{1 + B_2}{2}},\quad c = \sqrt{\frac{1 + A_2}{2}}$$

geben, so daſs der weiteren Berechnung der zu suchenden Gröſsen nichts mehr im Wege steht. Insbesondere findet man wegen $C_2 = -(ab + ac + bc)$

$$C_2 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{-(A_2 + B_2)(1 + A_2)}$$
$$-\tfrac{1}{2}\sqrt{-(A_2 + B_2)(1 + B_2)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 + A_2)(1 + B_2)}.$$

2. *Fall.* Es seyen die Kanten, welche sich in einem der dreikantigen Ecke vereinigen, z. B. diejenigen, deren Cosinusse C_2 und A_2 sind, gegeben.

Hier kommen die Gleichungen

$$a^2 + b^2 - c^2 = - A_2,$$
$$ab + ac + bc = - C_2,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

in Betrachtung. Man erhält aus denselben

$$c = \sqrt{\frac{1 + A_2}{2}}$$

und $a + b + c = \sqrt{1 - 2C_2}$, mithin

$$a^2 + b^2 = \frac{1 - A_2}{2}$$

und $a + b = \sqrt{1 - 2C_2} - \sqrt{\frac{1 + A_2}{2}}$,

woraus weiterhin

$$a - b = \sqrt{2(a^2 + b^2) - (a + b)^2}$$
$$= \sqrt{2C_2 - \left(\frac{1 + 3A_2}{2}\right) + 2\sqrt{\left(\frac{1 + A_2}{2}\right)(1 - 2C_2)}},$$

folglich

$$a = \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - 2C_2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1 + A_2}{2}}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sqrt{2C_2 - \left(\frac{1 + 3A_2}{2}\right) + 2\sqrt{\left(\frac{1 + A_2}{2}\right)(1 - 2C_2)}}$$

und

$$b = \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - 2C_2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1 + A_2}{2}}$$
$$- \tfrac{1}{2}\sqrt{2C_2 - \left(\frac{1 + 3A_2}{2}\right) + 2\sqrt{\left(\frac{1 + A_2}{2}\right)(1 - 2C_2)}}$$

erhalten wird.

Wäre statt der Kante, worauf sich A_2 bezieht, jene, welcher der Cosinus B_2 zugehört, und die offenbar kleiner ist als die erstere, gegeben worden, so hätte

$a^2 - b^2 + c^2 = - B_2$ statt $a^2 + b^2 - c^2 = - A_2$

unter die drei Gleichungen, von welchen die Rechnung ausging, aufgenommen werden müssen, woraus sich

$$a = \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - 2C_2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1+B_2}{2}}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\sqrt{2C_2 - \left(\frac{1+3B_2}{2}\right) + 2\sqrt{\left(\frac{1+B_2}{2}\right)(1-2C_2)}},$$

$$b = \sqrt{\frac{1+B_2}{2}},$$

$$c = \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - 2C_2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1+B_2}{2}}$$

$$- \tfrac{1}{2}\sqrt{2C_2 - \left(\frac{1+3B_2}{2}\right) + 2\sqrt{\left(\frac{1+B_2}{2}\right)(1-2C_2)}}$$

ergeben hätte.

10.

Die Gleichungen, welche für die Kanten der übrigen einfachen Gestalten des tessularischen Krystallsystemes gelten, lassen sich leicht aus den bereits gefundenen ableiten.

Ein Tetrakontaoktaëder verwandelt sich nämlich *erstlich* in ein *hexaëdrisches Trigonal-Ikositetraëder* (vergl. die 35ste Figur im Grundr. d. M. mit der 28sten), wenn die Kanten, welche die achtflächigen Ecke mit den vierflächigen verbinden, die Gröſse zweier rechter Winkel erreichen, oder was dasselbe heiſst, wenn je zwei der in diesen Kanten sich begegnenden Flächen in eine Ebene zu liegen kommen. In diesem Falle wird in den Gleichungen (3) $B = -1$, mithin

$$a^2 + b^2 - c^2 = 1 = a^2 + b + c^2,$$

$$\text{also} \quad c = 0.$$

Nennt man nun den Cosinus der Kante, welche die sechsflächigen Ecke des hexaëdrischen Trigonal-Ikositetraëders mit einander verbindet, in Übereinstimmung mit der 28sten Fig. des Grundr. A', und den Cosinus der anderen Kante B', so sind A', B' die Werthe, welche

die in (3) gebrauchten Cosinusse C, A für $c = 0$ erhalten. Man hat daher

(8) $A' = -2ab$; $B' = -a^2$, wobei $a^2 + b^2 = 1$ ist.

Zweitens geht ein Tetrakontaoktaëder in ein *oktaëdrisches Trigonal-Ikositetraëder* über, wenn die Kanten, welche die sechsflächigen Ecke mit den vierflächigen vereinigen, 180° gleich werden (vergl. die 35ste Figur des Grundr. d. M. mit der 29sten). In diesem Falle verwandelt sich C in -1, d. h. es wird

$$2ab + c^2 = 1 = a^2 + b^2 + c^2, \text{ also}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 0, \text{ d. ist } a - b = 0, \text{ oder } a = b.$$

Es sey A'' der Cosinus jeder Kante, welche von einem achtflächigen Ecke des oktaëdrischen Trigonal-Ikositetraëders zum andern geht, und B'' der Cosinus der zweiten an dieser Gestalt noch vorkommenden Kante, so sind A'', B'' die Werthe, deren die Cosinusse B, A für $a = b$ theilhaftig werden, folglich ist

(9) $A'' = -(2a^2 - c^2)$; $B'' = -(a^2 + 2ac)$;
$$2a^2 + c^2 = 1.$$

Drittens nimmt ein Tetrakontaoktaëder die Gestalt eines *zweikantigen Tetragonal-Ikositetraëders* an, wenn die zwischen den achtflächigen und den sechsflächigen Ecken befindlichen Kanten die Gröfse von 180° erlangen (vergl. die 35ste Figur d. Grundr. d. M. mit der 30sten). In Bezug auf diesen Fall ist $A = -1$ zu setzen, daher wird

$$a^2 + 2bc = 1 = a^2 + b^2 + c^2,$$

folglich $(b - c)^2 = 0$, d. h. $b = c$.

Es sey A''' der Cosinus jeder Kante, welche von einem pyramidalen Ecke eines zweikantigen Tetragonal-Ikositetraëders ausgeht, und B''' der Cosinus jeder anderen Kante, so sind A''', B''' die Werthe, welche

B, C für $b = c$ annehmen. Es ist also

(10) $A''' = -a^2$; $B''' = -(2ab + b^2)$; $a^2 + 2b^2 = 1$.

Nimmt man mit einem Tetrakontaoktaëder die erste und zweite der hier beschriebenen Veränderungen zugleich vor, so verwandelt sich dasselbe *viertens* in das *einkantige Tetragonal-Dodekaëder*. Der Cosinus der Kante desselben ergibt sich aus der Formel $A = -(a^2 + 2bc)$, wenn man daselbst $c = 0$ und $a = b$, also wegen $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $a^2 = \frac{1}{2}$ setzt. Es gehört demnach jede Kante dieser Gestalt zu dem Cosinus $-\frac{1}{2}$, d. h. sie beträgt 120°.

Das gleichzeitige Eintreten der ersten und dritten Veränderung staltet ein Tetrakontaoktaëder *fünftens* in das *Hexaëder* um. Der Cosinus der Kanten dieser Gestalt folgt aus $C = -(2ab + c^2)$ für $c = 0$ und $b = c$, d. h. dieser Cosinus ist $= 0$, wie es seyn muſs.

Bei dem Zusammenbestehen der zweiten und dritten Veränderung bietet jedes Tetrakontaoktaëder *sechstens* das *Oktaëder* dar. Um den Cosinus seiner Kanten zu erhalten, muſs man in $B = -(a^2 + b^2 - c^2)$, $a = b = c$ annehmen. Hiedurch wird $B = -a^2$; allein es ist $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, also $3a^2 = 1$, mithin der verlangte Cosinus $= -\frac{1}{3}$, welchem der Winkel 109° 28′ 16″ entspricht.

11.

Es ist nunmehr nichts weiter übrig, als die Hälften dieser Gestalten zu betrachten.

Da jedes hexaëdrische Trigonal-Ikositetraëder als ein besonderer Fall eines Tetrakontaoktaëders für $a^2 + b^2 - c^2 = 1$ betrachtet werden kann, so wird man auch die Hälfte eines hexaëdrischen Trigonal-Ikositetraëders erhalten, wenn man an irgend einer Hälfte des Tetrakontaoktaëders dieselbe Voraussetzung macht.

Allein hiezu wird erfordert, daſs eine Kante dieser letzteren Hälfte $= -(a^2 + b^2 - c^2)$ sey, was, wie die in 7. gegebenen Gleichungen lehren, nur bei dem dreikantigen Tetragonal-Ikositetraëder der Fall ist; es geht daher jedes dreikantige Tetragonal-Ikositetraëder, dadurch, daſs die stumpferen der an den pyramidalen Ecken liegenden Kanten (welche in der 31sten Figur des Grundr. d. M. den Buchstaben A an sich tragen) $= 180^0$ werden, in die Hälfte eines hexaëdrischen Trigonal-Ikositetraëders über. Hiedurch entsteht offenbar ein *hexaëdrisches Pentagonal-Dodekaëder* (Grundr. d. M. Fig. 20). Nennt man nun den Cosinus der charakteristischen Kante dieser Gestalt A'_1, und den Cosinus der anderen Kanten B'_1, so gehen, für $c = c$, B_2 und C_2 in A'_1 und B'_1 über. Man hat also

$$(11) \quad A'_1 = -(a^2 - b^2); \; B'_1 = -ab; \; a^2 + b^2 = 1.$$

Daſs hier a und b genau dieselbe Bedeutung haben, wie in den Gleichungen (8), bedarf kaum einer Erwähnung.

Das oktaëdrische Trigonal-Ikositetraëder geht aus dem Tetrakontaoktaëder hervor, wenn die auf letztere Gestalt sich beziehenden Cosinusse a, b, c der Gleichung $2ab + c^2 = 1$ Genüge leisten. Eine Hälfte des Tetrakontaoktaëders, an welcher eine dem Cosinus $-(2ab + c^2)$ entsprechende Kante vorkommt, verwandelt sich also durch die so modificirten Werthe von a, b, c in die Hälfte eines oktaëdrischen Trigonal-Ikositetraëders. Die Kante von der erwähnten Beschaffenheit befindet sich, wie die in 7. entwickelten Gleichungen zeigen, nur an dem tetraëdrischen Trigonal-Ikositetraëder, und verbindet die rhomboëdrischen Ecke desselben. Fallen die durch diese Kante begrenzten Flächen genannter Gestalt in eine Ebene, so entsteht (vergl. Fig. 26 im Grundr. d. M. mit Fig. 18) ein *zweikantiges Tetragonal-Dodekaëder*. Es sey A''_1 der Cosinus jeder der aus den spitze-

ren, und $B''_{\prime}$ der Cosinus jeder der aus den stumpferen Ecken des zweikantigen Tetragonal-Dodekaëders ausgehenden Kanten, so sind $A''_{\prime}$, $B''_{\prime}$ die Werthe, welche A_1 und C_1 in den Gleichungen (4) für $a = b$ erhalten. Dem zu Folge ist

$$(12) \quad A''_{\prime} = -(a^2 - 2ac); \quad B''_{\prime} = -(a^2 + 2ac);$$
$$2a^2 + c^2 = 1,$$

wobei a und c dieselben Werthe besitzen, wie in den Gleichungen (9).

Die Hälfte des zweikantigen Tetragonal-Ikositetraëders kann gleichfalls nur aus dem tetraëdrischen Trigonal-Ikositetraëder gebildet werden, an welchem allein die Kante des Tetrakontaoktaëders, deren Cosinus bei der Umbildung dieser Gestalt in ein zweikantiges Tetragonal-Ikositetraëder $= -1$ werden muſs, vorkommt. Diese Kante, auf welche sich in den Gleichungen (4) C_1 bezieht, ist, wie eben diese Gleichungen zeigen, die stumpfere unter den beiden, in den vierflächigen Ecken des tetraëdrischen Trigonal-Ikositetraëders zusammenlaufenden. Nimmt dieselbe die Gröſse zweier rechter Winkel an, so hat man (vergl. Fig. 26 im Grund. d. M. mit Fig. 15) ein *Trigonal-Dodekaëder* vor sich. Stellen die Symbole $A'''_{\prime}$ und $B'''_{\prime}$ die Werthe vor, welche A_1 und B_1 für $b = c$ erlangen, so finden die Gleichungen

$$(13) \quad A'''_{\prime} = -(a^2 - 2b^2); \quad B'''_{\prime} = -(2ab + b^2);$$
$$a^2 + 2b^2 = 1$$

Statt, in welchen a und b dieselben Werthe haben, wie in den Gleichungen (10).

Die Kanten, welche bei dem Übergange eines Tetrakontaoktaëders in das einkantige Tetragonal-Dodekaëder oder in das Hexaëder geebnet werden, kommen an keiner der Hälften des Tetrakontaoktaëders zugleich vor, wohl aber die Kanten, welche bei der Verwandlung des

Tetrakontaoktaëders in ein Oktaëder $= 180^\circ$ werden. Sie befinden sich an dem tetraëdrischen Trigonal-Ikositetraëder, welches für die mit erwähnter Verwandlung verbundene Annahme $a = b = c$ die Gestalt des Tetraëders annimmt. Den Cosinus der Kanten des letztern gibt die erste der Gleichungen (4) $= -(a^2 - 2a^2) = a^2 = \frac{1}{3}$.

Wie aus den Gleichungen (7) zu ersehen ist, erscheint keine der Kanten eines Tetrakontaoktaëders an seinen Vierteln; mithin kann auch keine der in 10. betrachteten Gestalten noch weiter zerlegt werden.

12.

Es ist nun ein Leichtes, die Gleichungen zwischen den Kanten der in 10. und 11. betrachteten einfachen tessularischen Gestalten darzustellen.

I. Für jedes hexaëdrische Trigonal-Ikositetraëder und das darin enthaltene hexaëdrische Pentagonal-Dodekaeder findet man mittelst der Gleichungen (8) und (11)

$$a = \tfrac{1}{2}(\sqrt{1 - A'} + \sqrt{1 + A'}) = \sqrt{-B'}$$
$$= \sqrt{\frac{1 - A'_1}{2}} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{1 - 2B'_1} + \sqrt{1 + 2B'_1}),$$
$$b = \tfrac{1}{2}(\sqrt{1 - A'} - \sqrt{1 + A'}) = \sqrt{1 + B'}$$
$$= \sqrt{\frac{1 + A'_1}{2}} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{1 - 2B'_1} - \sqrt{1 + 2B'_1}),$$
$$A' = -2\sqrt{-B'(1 + B')} = -\sqrt{1 - (A'_1)^2} = 2B'_1,$$
$$B' = -\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - (A')^2}) = -\left(\frac{1 - A'_1}{2}\right)$$
$$= -\tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4(B'_1)^2}),$$
$$A'_1 = -\sqrt{1 - (A')^2} = 1 + 2B' = -\sqrt{1 - 4(B'_1)^2},$$
$$B'_1 = \tfrac{1}{2}A' = -\sqrt{-B'(1 + B')} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{1 - (A'_1)^2}.$$

Diese Formeln lassen sich für die Fälle, in welchen A', B', A'_1, B'_1 nicht als einfache rationale Brüche gegeben sind, zur Rechnung bequemer einrichten, wenn

man

$A' = \cos.\alpha$, $B' = \cos.\beta$, $A'_1 = \cos.\alpha'$, $B'_1 = \cos.\beta'$ setzt, und dieselben mit Hülfe der bekannten Eigenschaften der Kreisfunctionen transformirt. Hiedurch wird z. B.

$$a = \cos.\left(\frac{\alpha}{2} - 45^\circ\right) = \sin.\tfrac{1}{2}\alpha',$$

$$b = -\cos.\left(\frac{\alpha}{2} + 45^\circ\right) = \cos.\tfrac{1}{2}\alpha' = \sqrt{2}\,.\cos.\tfrac{1}{2}\beta,$$

$\alpha + \alpha' = 270^\circ$, u. d. gl.

II. Die Gleichungen (9) und (12) geben für die oktaëdrischen Trigonal-Ikositetraëder und die in denselben enthaltenen zweikantigen Tetragonal-Dodekaëder

$$a = \tfrac{1}{2}\sqrt{1 - A''} = \tfrac{1}{3}(\sqrt{1 - 2B''} + \sqrt{1 + B''})$$
$$= \tfrac{1}{3}(\sqrt{1 + A''} + \sqrt{1 - A''_1}) = \tfrac{1}{3}(\sqrt{1 - 2B''_1} + \sqrt{1 + B''_1}),$$

$$c = \sqrt{\frac{1 + A''}{2}} = \tfrac{1}{3}(\sqrt{1 - 2B''} - 2\sqrt{1 + B''})$$
$$= \tfrac{1}{3}(\sqrt{1 + A''_1} - 2\sqrt{1 - A''_1}) = \tfrac{1}{3}(\sqrt{1 - 2B''_1} - 2\sqrt{1 + B''_1}),$$

mittelst welcher Ausdrücke sich jeder der Cosinusse A'', B'', A''_1, B''_1 aus jedem der übrigen, den Gleichungen (9) und (12) gemäfs, bestimmen läfst.

III. Endlich findet man aus den Gleichungen (10) und (13) für die zweikantigen Tetragonal-Ikositetraëder und die in denselben enthaltenen Trigonal-Dodekaëder

$$a = \sqrt{-A'''} = \tfrac{1}{3}(\sqrt{1 - 2B'''} + 2\sqrt{1 + B'''})$$
$$= \sqrt{\frac{1 - A'''_1}{2}} = \tfrac{1}{3}(\sqrt{1 - 2B'''_1} + 2\sqrt{1 + B'''_1}),$$

$$b = \sqrt{\frac{1 + A''}{2}} = \tfrac{1}{3}(\sqrt{1 - 2B'''} - \sqrt{1 + B'''})$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + A'''_1} = \tfrac{1}{3}(\sqrt{1 - 2B'''_1} - \sqrt{1 + B'''_1}),$$

welche Ausdrücke die Berechnung jeder der Gröfsen A''', B''', A'''_1, B'''_1 aus jeder der übrigen dieser Grössen vermitteln.

13.

Ehe ich den Gegenstand dieses Aufsatzes verlasse, will ich, zur Verdeutlichung des in 7. Gesagten, noch zeigen, wie man mittelst der in 4. erklärten Bezeichnung der Grenzflächen eines Tetrakontaoktaëders die Flächen, welche zu einer beliebigen Hälfte oder zu einem Viertel desselben gehören, den im §. 128 des Grundrisses der Mineralogie erklärten Verfahrungsarten der Zerlegung einer einfachen tessularischen Gestalt gemäfs, ohne Hülfe einer Abbildung der in der Frage stehenden Gestalt, angeben kann.

Das Zeichen, welches in 4. zur Darstellung jeder Grenzfläche eines Tetrakontaoktaëders angenommen wurde, besteht aus den Zeichen der drei Eckpuncte dieser Grenzfläche, wovon stets der eine in ein pyramidales, der zweite in ein rhomboëdrisches, der dritte in ein prismatisches Eck des Tetrakontaoktaëders fällt. Eine leichte Überlegung, welche ich hier füglich bei Seite setzen kann, lehrt, dafs der Buchstabe, welcher das pyramidale Eck einer Grenzfläche der genannten Gestalt anzeigt, nothwendig unter den beiden Buchstaben vorkommt, welche das Zeichen des prismatischen Eckes bilden, und dafs diese zwei Buchstaben wiederum in dem (aus drei Buchstaben bestehenden) Zeichen des rhomboëdrischen Eckes dieser Grenzfläche erscheinen müssen; ferner dafs in dem Zeichen einer solchen Grenzfläche nie die, entgegengesetzte Beziehungen ausdrückenden, Buchstaben *O* und *U*, und eben so wenig *V* und *H*, oder *R* und *L* zugleich enthalten seyn können.

Wenn die Zeichen zweier Grenzflächen eines Tetrakontaoktaëders sich dadurch von einander unterscheiden, dafs in dem einen *O* und in dem anderen *U*, oder in dem einen *V* und in dem anderen *H*, oder in dem einen *R* und in dem anderen *L* vorkommt, so kann man

in Bezug auf jeden dieser drei Fälle, für sich betrachtet, sagen, es herrsche in den Zeichen beider Flächen ein *Gegensatz*, und hiedurch erklärt sich von selbst die Redensart: »in den Zeichen zweier Flächen finde eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Gegensätzen Statt.«

Man stelle die Buchstaben, durch welche die rhomboëdrischen Ecke eines Tetrakontaoktaëders in den Zeichen seiner Grenzflächen angedeutet werden, in eine bestimmte Ordnung, z. B. so, daſs *O* oder *U* stets den ersten, *V* oder *H* den zweiten, *R* oder *L* den dritten Platz erhält, und betrachte die Gruppe dieser drei Buchstaben als eine in sich selbst zurückkehrende Periode, so daſs der erste und der dritte Buchstabe als benachbarte gelten, oder jener wieder auf diesen folgt.

Man sehe ferner in dem Symbole jeder einzelnen Fläche des vorliegenden Tetrakontaoktaëders darauf, ob in dem Zeichen des prismatischen Eckes der mit dem Zeichen des pyramidalen Eckes gleichnamige Buchstabe auf den neben ihm stehenden, der so eben festgesetzten Ordnung gemäſs, unmittelbar folgt, oder, ob dieser jenem unmittelbar vorangeht. Die Zeichen zweier Flächen, welche in diesem Puncte mit einander übereinkommen, mögen *gleichartige*, und diejenigen, bei welchen das Gegentheil obwaltet, mögen *ungleichartige* heiſsen.

In den Zeichen (*O*, *OVL*, *OL*) und (*H*, *OHR*, *HR*) findet also eine gerade Anzahl von Gegensätzen Statt, und sie sind zugleich ungleichartig.

Dieſs vorausgesetzt, gelten zum Behufe der Zerlegung eines Tetrakontaoktaëders nachstehende Bestimmungen:

α) Wird irgend ein rhomboëdrisches Eck eines Tetrakontaoktaëders als *Hauptpunct* gewählt (Grundriſs d. Mineral. §. 128), so entstehen die Zeichen der

übrigen Hauptpuncte aus dem Zeichen des ersteren durch eine gerade, und die Zeichen der Nebenpuncte durch eine ungerade Anzahl von Gegensätzen.

β) Die Zeichen der abwechselnden Flächen, unter jenen, welche ein rhomboëdrisches Eck eines Tetrakontaoktaëders umgeben, sind gleichartig, die Zeichen zweier unmittelbar auf einander folgenden Flächen aber ungleichartig.

γ) Die Zeichen zweier paralleler Flächen eines Tetrakontaoktaëders sind gleichartig (und bei denselben zeigen sich drei Gegensätze).

δ) Wenn bei der Zerlegung eines Tetrakontaoktaëders die abwechselnden Flächen an einem Hauptpuncte vergröſsert werden, so muſs dieſs an den übrigen Hauptpuncten mit jenen Flächen geschehen, welche mit ersteren gleichartig sind.

Bringt man das hier Gesagte hinsichtlich jedes der drei im §. 128 des Grundr. d. M. beschriebenen Verfahren der Zerlegung in gehörige Anwendung, und verbindet man hiemit zugleich den Inhalt der §§. 133 und 134, so ergibt sich die Schluſsfolge:

I. daſs sämmtliche Flächen eines Tetrakontaoktaëders, an deren Zeichen, je zwei mit einander verglichen, eine gerade Anzahl von Gegensätzen erscheint, ein tetraëdrisches Trigonal-Ikositetraëder;

II. daſs sämmtliche Flächen, deren Zeichen gleichartig sind, ein dreikantiges Tetragonal-Ikositetraëder;

III. daſs sämmtliche Flächen, deren Zeichen paarweise verglichen gleichartig und mit einer geraden Anzahl von Gegensätzen versehen sind, in Verbindung mit sämmtlichen Flächen, welche den ersteren gegenüber gestellt, ungleichartige und eine ungerade An-

zahl von Gegensätzen darbietende Zeichen besitzen, ein Pentagonal-Ikositetraëder; endlich

IV. daſs sämmtliche Flächen mit gleichartigen und eine gerade Anzahl von Gegensätzen darstellenden Zeichen ein tetraëdrisches Pentagonal-Dodekaëder begrenzen.

Hiernach ist es nun sehr leicht, aus dem Zeichen irgend einer Tetrakontaoktaëderfläche die Zeichen der übrigen Flächen derselben Gestalt abzuleiten, welche mit ersterer Fläche zugleich an einer beliebigen Hälfte oder an einem Viertel dieses Tetrakontaoktaëders vorkommen, und diejenigen unter diesen Flächen anzugeben, welche dabei als Nachbarflächen der ersteren erscheinen.

Zusatz,

die Berechnung des Verhältnisses je zweier linearen Abmessungen einer einfachen tessularischen Gestalt aus zwei gegebenen Kanten derselben betreffend.

Hat man die Cosinusse der Winkel, welche das aus dem Mittelpuncte einer einfachen tessularischen Gestalt auf eine ihrer Grenzflächen fallende Perpendikel mit den Hauptheilen der drei Axen bildet, durch Functionen von höchstens zwei Kanten dieser Gestalt ausgedrückt, so gelangt man auch ohne Mühe zur Kenntniſs des Verhältnisses, in welchem jede zwei beliebige lineare Abmessungen derselben zu einander stehen.

Denn sind a', b', c' die irgend einem solchen Perpendikel entsprechenden Cosinusse, und ist p die für alle Grenzflächen einer einfachen tessularischen Gestalt gleiche Länge dieses Perpendikels; nimmt man ferner die Axen der Gestalt für die Axen der Coordinaten x,

y, z an, so stellt

$$a'x + b'y + c'z = p$$

die Gleichung der Grenzfläche der Gestalt vor, auf welche sich dieses Perpendikel bezieht, wobei a', b', c' die bisher durchgehends gebrauchten Werthe $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$ in der dieser Grenzfläche correspondirenden Ordnung und mit den gehörigen Zeichen besitzen.

Durch schickliche Verbindung der Gleichungen mehrerer Grenzflächen erhält man also, den bekannten Vorschriften der analytischen Geometrie gemäfs, die Gleichungen der Kantenlinien, die Coordinaten ihrer Durchschnittspuncte, die Längen der Kantenlinien, die Längen der verschiedenen rhomboëdrischen, pyramidalen, prismatischen oder hemiprismatischen Axen u. d. gl. sämmtlich durch a, b, c und p ausgedrückt. In die gefundenen Ausdrücke kann man nun statt a, b, c die zur Bestimmung des Verhältnisses der Abmessungen der Gestalt nöthigen und als gegeben vorausgesetzten Kanten, und statt p die Länge jeder beliebigen linearen Dimension einführen.

So sind, zum Beispiel, die Gleichungen der Flächen (V, OVR, OV), (V, OVR, VR), (V, OVL, OV), (O, OVR, OV) eines Tetrakontaoktaeders:

$$bx + ay + cz = p,$$
$$cx + ay + bz = p,$$
$$bx + ay - cz = p,$$
$$ax + by + cz = p.$$

Die drei ersten Flächen schneiden sich, wie aus ihren Zeichen erhellet, in dem Puncte V. Läfst man ihre Gleichungen zusammen bestehen, und sucht man die denselben zugleich Genüge leistenden Werthe von x, y, z, so findet man

für den Punct V: $x = o$, $z = o$, $y = \frac{p}{a}$.

Der hier für y gefundene Werth gibt zugleich die Länge der halben pyramidalen Axe des Tetrakontaoktaëders an. Nennt man dieselbe P, so hat man also $P = \frac{p}{a}$.

Die erste, zweite und vierte der genannten Flächen schneiden einander im Puncte OVR. Die Coordinaten dieses Punctes sind also

$$x = y = z = \frac{p}{a + b + c}.$$

Hieraus folgt für die Länge der halben rhomboëdrischen Axe des Tetrakontaoktaëders, welche R heifse, wegen $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$ der Ausdruck

$$R = \frac{p\sqrt{3}}{a + b + c}.$$

Die erste, dritte und vierte obiger Flächen durchschneiden sich im Puncte OV. Die Coordinaten desselben sind also

$$z = 0, \quad x = y = \frac{p}{a + b},$$

und defshalb ist die Länge der halben prismatischen Axe des Tetrakontaoktaëders

$$Q = \frac{p\sqrt{2}}{a + b}.$$

Nimmt man $P = 1$ an, so ergibt sich $p = a$, mithin

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{a + b + c}, \quad Q = \frac{a\sqrt{2}}{a + b},$$

wobei man für a, b, c die in 8. gefundenen Ausdrücke zu setzen hat.

Bezeichnet man die Längen der Kantenlinien des Tetrakontaoktaëders dadurch, dafs man die Zeichen der Ecke, welche dieselben verbinden, neben einander schreibt, so hat man, weil überhaupt das Quadrat der Distanz zweier Puncte der Summe der Quadrate der Differenzen der gleichnamigen Coordinaten dieser Puncte gleich kommt:

$$(V,\ OVR) = \frac{p\sqrt{1 + a^2 + 2bc}}{a(a + b + c)},$$

$$(V,\ OV) = \frac{p\sqrt{a^2 + b^2}}{a(a + b)},$$

$$(OVR,\ OV) = \frac{p\sqrt{1 + 2ab + c^2}}{(a + b)(a + b + c)}.$$

Auf ähnliche Weise wird die Rechnung auch für die übrigen Gestalten geführt.

Die Formel, welche oben für die Länge der halben rhomboëdrischen Axe des Tetrakontaoktaëders gefunden wurde, kann, vorausgesetzt, dafs man die Hälfte der pyramidalen, oder, wo diese fehlen, der ihre Stelle vertretenden prismatischen Axen für die Einheit ansieht, geradezu auf alle Gestalten angewendet werden, bei deren Ursprung aus dem Tetrakontaoktaëder sämmtliche rhomboëdrische Ecke dieser Gestalt die Endpuncte der rhomboëdrischen Ecke der neuen Gestalt darbieten; also auf alle einfache tessularische Gestalten, die tetraëdrischen Trigonal-Ikositetraëder und die daraus hervorgehenden Gestalten ausgenommen. Bei diesen werden die rhomboëdrischen Axen durch den Mittelpunct der Gestalt in ungleiche Theile getheilt. Für den kleineren dieser Theile gilt der oben gefundene Ausdruck

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{a + b + c}.$$

Den Werth R' des anderen Theiles erhält man, wenn man die Coordinaten des Durchschnittspunctes der Tetrakontaoktaëderflächen

$$(V,\ OVR,\ OV),\quad (V,\ UVL,\ VL),\quad (O,\ OVR,\ OV)$$

berechnet, und mittelst derselben den Abstand dieses Punctes vom Mittelpuncte bestimmt. Die erwähnten Coordinaten sind, wie die Gleichungen dieser Flächen, nämlich

$$bx + ay + cz = p,$$
$$-cx + ay - bz = p,$$
$$ax + by + cz = p$$

lehren:

$$x = y = \frac{p}{a + b - c}; \quad z = -\frac{p}{a + b - c};$$

daher ist $R' = \frac{a\sqrt{3}}{a + b - c}$.

Denkt man sich um ein in der in 4. gewählten Stellung befindliches Tetrakontaoktaëder ein Hexaëder beschrieben, dessen pyramidale Axen mit jenen des Tetrakontaoktaëders der Lage und Länge nach übereinstimmen, und wünscht man, *zum Behufe der Ableitung des Tetrakontaoktaëders aus dem Hexaëder*, die Stücke m und n zu kennen, welche die Erweiterung der Fläche (O, OVR, OV) (worauf sich die Cosinusse a, b, c beziehen) von den Obertheilen der rechten und linken verticalen Seite der Vorderfläche des Hexaëders abschneidet, so setze man in der Gleichung der Ebene $(O, OVR, \dot{O}V)$, nämlich in

$$ax + by + cz = p,$$

ein Mal $y = z = \frac{1}{2}h$, und das andere Mal $y = \frac{1}{2}h$, $z = -\frac{1}{2}h$, wobei h die Seite des Hexaëders vorstellt. Man findet, wenn man die hiedurch sich ergebenden Werthe von x, der Unterscheidung willen, x' und x'' nennt, für die erste Substitution

$$x' = \frac{p - (b + c) \cdot \frac{1}{2}h}{a},$$

und für die zweite

$$x' = \frac{p - (b - c) \cdot \frac{1}{2}h}{a}.$$

Aber, wie man leicht sieht, ist $\frac{1}{2}h = \frac{p}{a}$ und

$$m = \frac{1}{2}h - x', \quad n = \frac{1}{2}h - x'',$$

mithin hat man

$$m = \frac{(b + c) \cdot \frac{1}{2} h}{a}, \quad n = \frac{(b - c) \cdot \frac{1}{2} h}{a}.$$

Setzt man an die Stelle des Tetrakontaoktaëders ein hexaëdrisches Trigonal-Ikositetraëder, so wird $c = 0$. Es ist also in diesem Falle

$$m = n = \frac{b}{2a} \cdot h.$$

Läſst man das Tetrakontaoktaëder in ein oktaëdrisches Trigonal-Ikositetraëder übergehen, so wird $a = b$, folglich

$$m = \left(1 + \frac{c}{a}\right) \tfrac{1}{2} h, \quad n = \left(1 - \frac{c}{a}\right) \tfrac{1}{2} h,$$

und daher $m + n = h$.

Verwandelt sich das Tetrakontaoktaëder in ein zweikantiges Tetragonal-Ikositetraëder, so wird $b = c$, mithin

$$m = \frac{b}{a} \cdot h, \quad n = 0.$$

Für das einkantige Tetragonal-Dodekaëder muſs, wie aus dem in 11. Gesagten hervorgeht, insbesondere

$$m = n = \tfrac{1}{2} h,$$

für das Hexaëder

$$m = n = 0,$$

und für das Oktaëder

$$m = h, \quad n = 0 \quad \text{seyn.}$$

Diese Resultate können zur Erläuterung der §§. 120—127 des Grundrisses der Mineralogie dienen.

II.

Allgemeine Untersuchungen über die Eigenschaften der Puncte des Raumes in Bezug auf die Hauptmomente der Kräfte;

von

Franz Xaver Moth.

(Beschluſs.)

IV. Kürzester Abstand der Hauptachse eines Punctes vom Durchmesser. Alle Hauptachsen der Puncte einer Cylinderfläche, deren Achse der Durchmesser ist, liegen in den Berührungsebenen.

19. Wenn die Gleichungen zweier Geraden sind:

$$\left.\begin{array}{l} y = ax + b; \\ z = a_{,}x + b_{,}; \end{array}\right\} \text{ und } \left\{\begin{array}{l} y = \alpha x + \beta; \\ z = \alpha_{,}x + \beta_{,}; \end{array}\right.$$

dann hat man für den kürzesten Abstand R dieser zwei Geraden von einander, den Ausdruck:

$$R = \frac{(a - \alpha)\,(b_{,} - \beta_{,}) - (a_{,} - \alpha_{,})\,(b - \beta)}{\sqrt{[(a - \alpha)^2 + (a_{,} - \alpha_{,})^2 + (a_{,}\alpha - a\,\alpha_{,})^2]}}.$$

Wenden wir nun diesen allgemeinen Ausdruck auf den Fall an, wo die eine Gerade die Hauptachse eines Punctes, und die andere der Durchmesser des Systemes ist.

In diesem Falle hat man:

$$a = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}};\ a_{,} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}};\ \alpha = \frac{B}{A};\ \alpha_{,} = \frac{C}{A};\ b = \frac{Z}{\mathfrak{A}};\ b_{,} = \frac{-Y}{\mathfrak{A}};$$

$$\beta = \left(\frac{Ay_{,} - Bx_{,}}{A}\right);\ \beta_{,} = \left(\frac{Az_{,} - Cx_{,}}{A}\right).$$

Setzt man diese Werthe in den Ausdruck für R; so wird man nach einigen Reductionen desselben haben:

$$R = -\left[\frac{C_,.(b_, - \beta_,) + B_,.(b - \beta)}{K_,}\right] = \frac{D + (C_, \beta' + B_, \beta)}{K_,}$$

oder

$$R = \left[\frac{D + (A_, x_, + B_, y_, + C_, z_,)}{K_,}\right] = \left(\frac{D + u_,}{K_,}\right).$$

Setzt man für D und $u_,$ ihre Werthe aus den Gleichungen (11), (22); so hat man:

$$R = \left[\frac{\mathfrak{K}_,^2 + \mathfrak{K}^2 . v_, + \mathfrak{K}^2 . (K^2 - \mathfrak{W}^2 - v_,)}{\mathfrak{K}^2 . K_,}\right].$$

Die Reduction dieses Ausdruckes gibt alsogleich:

$$R = \left[\frac{\mathfrak{K}_,^2 + \mathfrak{K}^2 . K^2 - \mathfrak{K}^2 . \mathfrak{W}^2}{\mathfrak{K}^2 . K_,}\right] = \left(\frac{\mathfrak{K}^2 . K^2 - \mathfrak{D}^2}{\mathfrak{K}^2 . K_,}\right) = \frac{K_,}{\mathfrak{K}^2};$$

und endlich

$$R = \frac{\sqrt{\mathfrak{K}^2 . K^2 - \mathfrak{D}^2}}{\mathfrak{K}^2} = \frac{1}{\mathfrak{K}} . \sqrt{\left(K^2 - \frac{\mathfrak{D}^2}{\mathfrak{K}^2}\right)}.$$

Dieses ist genau der nämliche Ausdruck, den wir oben Nro. 13 für den Abstand des Punctes $(x_, y_, z_,)$ vom Durchmesser gefunden haben. Hieraus schlieſsen wir also, daſs die Hauptachse in derjenigen Ebene liegen müsse, welche durch diesen Punct senkrecht auf R gelegt wird. Diese Ebene ist aber eine die krumme Oberfläche des Cylinders berührende, und zwar geschieht die Berührung in den unendlich vielen Puncten einer zum Durchmesser parallelen Geraden.

Vereinigt man mit diesem Resultate das in Nro. 11 erhaltene; so geht hieraus hervor, daſs alle Hauptachsen der Puncte einer und derselben Cylinderfläche, deren Achse der Durchmesser des Systemes ist, in den Berührungsebenen gegen die Berührungslinie stets einerlei Neigung behalten, und daſs diese Neigung mit dem Halbmesser des Cylinders wachse.

20. Daſs die Hauptachsen der Puncte einer Cylinderfläche in die Berührungsebenen fallen, läſst sich noch auf folgende sehr einfache Art zeigen.

Die Gleichungen des Lothes, das vom Puncte $(x_{\prime}, y_{\prime}, z_{\prime})$ auf den Durchmesser des Systemes herabgelassen wird, sind bekanntlich:

$$\left.\begin{aligned} y - y_{\prime} &= \left(\frac{y_0 - y_{\prime}}{x_0 - x_{\prime}}\right) \cdot (x - x_{\prime}); \\ z - z_{\prime} &= \left(\frac{z_0 - z_{\prime}}{x_0 - x_{\prime}}\right) \cdot (x - x_{\prime}); \end{aligned}\right\}$$

worin $x_0\, y_0\, z_0$ die Coordinaten des Durchschnittspunctes dieses Lothes mit dem Durchmesser sind, und die obigen Werthe Nro. 13 haben. Setzt man diese Werthe in jene zwei Gleichungen, so erhält man auf der Stelle die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} y - y_{\prime} &= \frac{B_{\prime}}{A_{\prime}} (x - x_{\prime}); \\ z - z_{\prime} &= \frac{C_{\prime}}{A_{\prime}} (x - x_{\prime}); \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Dieses vorausgesetzt, wird nun der Ausdruck für den Cosinus des Winkels, den die Hauptachse des Punctes $(x_{\prime}, y_{\prime}, z_{\prime})$ mit diesem Lothe macht, seyn

$$\left(\frac{AA_{\prime} + BB_{\prime} + CC_{\prime}}{K \cdot K_{\prime}}\right).$$

Da nun der Zähler dieses Ausdruckes verschwindet; so folgt hieraus, daſs die Hauptachse dieses Punctes auf dem Lothe R, oder auf seiner Entfernung vom Durchmesser senkrecht stehe, oder daſs sie in die Berührungsebene des Cylinders falle. Man kann diesen Satz auch allgemein so ausdrücken: Alle Hauptachsen sind berührende Linien der krummen Cylinderfläche. Die Gleichung der Berührungsebene ist:

$$A_{\prime} \cdot (x - x_{\prime}) + B_{\prime} \cdot (y - y_{\prime}) + C_{\prime} \cdot (z - z_{\prime}) = 0 \quad . \quad (2)$$

In der That leisten ihr die Werthe der Coordinaten der Hauptachse dieses Punctes $(x_{\prime}, y_{\prime}, z_{\prime})$ für jeden Werth von $x_{\prime}$ Genüge, indem sich dieselbe, nachdem man

$$y - y_{,} = \frac{B}{A} \cdot (x - x_{,}); \quad z - z_{,} = \frac{C}{A} \cdot (x - x_{,})$$

in ihr substituirt hat, auf die identische Gleichung

$$A A_{,} + B B_{,} + C C_{,} = 0$$

reduzirt.

Man kann hier noch bemerken, daſs die Gleichungen der Geraden, in welcher sich die Ebene und Cylinderfläche berühren, und die zum Durchmesser parallel ist, folglich seyn werden:

$$\left.\begin{aligned} y - y_{,} &= \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} \cdot (x - x_{,}); \\ z - z_{,} &= \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} \cdot (x - x_{,}); \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Nennt man die Gerade l, und bezeichnet die Hauptachse mit H; so wird der Winkel $(H \,.\, l)$ für alle Lagen der berührenden Ebene derselben Cylinderfläche beständig bleiben, und nur mit der Entfernung der Ebene von dem ihr parallelen Durchmesser wachsen.

21. Wir wollen die Gleichung der Ebene entwickeln, in welcher die Hauptachse H und das Loth R liegt.

Es sey

$$L \,.\, (x - x_0) + M \,.\, (y - y_0) + N \,.\, (z - z_0) = 0$$

ihre Gleichung. Da sie durch die Hauptachse H gehen soll; so hat man die Bedingungsgleichung:

$$A \,.\, L + B \,.\, M + C \,.\, N = 0.$$

Wegen der Bedingung, daſs sie auch durch R gehen soll; hat man ferner:

$$A_{,} \,.\, L + B_{,} \,.\, M + C_{,} \,.\, N = 0.$$

Die Vereinigung dieser beiden Gleichungen gibt nachstehende für LMN annehmbare Werthe:

$$L = BC_{,} - C_{,}B = \mathfrak{X}_0; \quad M = CA_{,} - AC_{,} = \mathfrak{Y}_0;$$
$$N = AB_{,} - BA_{,} = \mathfrak{Z}_0;$$

demnach ist

$$\mathfrak{X}_0 . (x - x_0) + \mathfrak{Y}_0 . (y - y_0) + \mathfrak{Z}_0 . (z - z_0) = 0 \quad . \ . \ (1)$$

die gesuchte Gleichung der Ebene (HR).

Der Durchschnitt dieser Ebene mit der krummen Oberfläche des Cylinders gibt *eine Ellipse*, deren Gleichungen aus der Gleichung (1) der schneidenden Ebene (HR) und der der Cylinderfläche, für welche man hat: $\mathfrak{K} . R = \sqrt{\left(K^2 - \frac{\mathfrak{D}^2}{\mathfrak{K}^2}\right)}$, zu entwickeln sind.

Bezeichnet man den Punct ($x_0\, y_0\, z_0$) des Durchmessers mit I, und zieht durch ihn eine zur Hauptachse parallele Gerade IU; so sind ihre Gleichungen:

$$y - y_0 = \frac{B}{A}(x - x_0); \quad z - z_0 = \frac{C}{A}(x - x_0) \quad . \ (2)$$

Denkt man sich durch den Punct I senkrecht auf die Ebene der Geraden R und IU eine Gerade IV gezogen; so sind ihre Gleichungen;

$$y - y_0 = \frac{\mathfrak{Y}_0}{\mathfrak{X}_0}(x - x_0); \quad z - z_0 = \frac{\mathfrak{Z}_0}{\mathfrak{X}_0}(x - x_0) \quad . \ (3)$$

22. Um die Gleichung dieser Ellipse in der einfachsten Gestalt zu erhalten, denke man sich den Anfangspunct der Coordinaten in den Punct ($x_0\, y_0\, z_0$) oder I übertragen, und die Puncte des Raumes gegen die drei auf einander senkrecht stehenden Geraden IU, IR, IV, welche man als ein neues System coordinirter Achsen betrachten kann, bezogen. Es seyen nun $x y z$ die Coordinaten irgend eines Punctes M' gegen das ursprüngliche Achsensystem bezogen, gegen welches $x_0\, y_0\, z_0$ die Coordinaten des Punctes I sind; und $x'_0\, y'_0\, z'_0$ seyen die Coordinaten desselben Punctes M' in Bezug auf den Anfangspunct I und die Achsen IU, IR und IV. In Rücksicht auf diese letztern Coordinaten sind $x_,\, y_,\, z_,$ und $x_0\, y_0\, z_0$ als unveränderliche Grösen zu betrachten.

Dieses vorausgesetzt, hat man nun folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{A \cdot x'_0}{K} + \frac{A_{,} \cdot y'_0}{K_{,}} + \frac{\mathfrak{X}_0 \cdot z'_0}{\mathfrak{W}_0}; \\ y &= y_0 + \frac{B \cdot x'_0}{K} + \frac{B_{,} \cdot y'_0}{K_{,}} + \frac{\mathfrak{Y}_0 \cdot z'_0}{\mathfrak{W}_0}; \\ z &= z_0 + \frac{C \cdot x'_0}{K} + \frac{C_{,} \cdot y'_0}{K_{,}} + \frac{\mathfrak{Z}_0 \cdot z'_0}{\mathfrak{W}_0}. \end{aligned}\right\}$$

Die Gleichung der schneidenden Ebene wird nun seyn $z'_0 = 0$; und in dieser Beziehung hat man für jeden Punct dieser Ebene:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{D}}{\mathfrak{K}^2} - \frac{A_{,}}{K} \cdot x'_0 - \frac{A_0}{K_{,}} \cdot y'_0; \\ B &= \frac{\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{D}}{\mathfrak{K}^2} - \frac{B_{,}}{K} \cdot x'_0 - \frac{B_0}{K_{,}} \cdot y'_0; \\ C &= \frac{\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{D}}{\mathfrak{K}^2} - \frac{C_{,}}{K} \cdot x'_0 - \frac{C_0}{K_{,}} \cdot y'_0. \end{aligned}\right\}$$

Setzt man diese Werthe von ABC in die Gleichung:

$$K^2 = A^2 + B^2 + C^2;$$

so wird man nach einigen Reductionen, und mit Benützung der Gleichungen in den Systemen (30), (33), (28) erhalten:

$$K^2 = \frac{\mathfrak{D}^2}{\mathfrak{K}^2} + \left(\frac{K_{,}^2}{K^2} \cdot x'^2_0 + \mathfrak{K}^2 \cdot y'^2_0 \right);$$

oder wegen $\left(K^2 - \frac{\mathfrak{D}^2}{\mathfrak{K}^2}\right) = \mathfrak{K}^2 \cdot R^2$:

$$y'^2_0 = \left[R^2 - \frac{K_{,}^2}{\mathfrak{K}^2 \cdot K^2} \cdot x'^2_0 \right].$$

Wir schliefsen aus dieser Gleichung *der Ellipse*, dafs die halbe kleine Achse derselben $= R$ oder IS sey, und dafs der Werth der grofsen halben Achse gleich sey $\left[\frac{\mathfrak{K} \cdot K \cdot R}{K_{,}}\right]$. Der Abstand ihres Brennpunctes vom Puncte I (Excentricität) ist $= \left[\frac{\mathfrak{D} \cdot R}{K_{,}}\right]$.

V. Untersuchungen über die Hauptmomente und über die Lagen der Hauptachsen in einigen besonderen Fällen.

23. Die aus den bisherigen Untersuchungen gewonnenen Resultate über die Momente der Kräfte sind ganz allgemein, welches auch immer die Beschaffenheit dieser Kräfte, und der Ausdehnung des Systemes materieller Puncte, woran sie wirken, seyn mag. Es gibt aber einige besondere Fälle, in welchen diese allgemeinen Resultate modificirt werden, und die wir hier noch in Betrachtung ziehen wollen. Es sind dieſs diejenigen, in welchen $\mathfrak{D} = 0$ ist, und von welchen wir schon oben angemerkt haben, daſs für sie das kleinste Hauptmoment $= 0$ sey *), und daſs in jedem andern Puncte das Hauptmoment $K = \mathfrak{K} . R$, und folglich dem Abstande dieses Punctes vom Durchmesser proportional sey; daſs endlich in diesem Falle alle am Systeme angebrachten Kräfte durch eine einzige ersetzt werden können.

Unter den Fällen, in welchen $\mathfrak{D} = 0$, führe ich als die merkwürdigsten folgende zwei an:

Erster Fall. Wenn $\mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = 0$; dann ist $A = \mathfrak{X}$, $B = \mathfrak{Y}$, $C = \mathfrak{Z}$, $K = \sqrt{(\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2)} = \mathfrak{W}$; hieraus folgt also, weil im Ausdrucke für K die Coordinaten $x, y, z,$ des Punctes S wegfallen, daſs die Hauptmomente für alle Puncte des Raumes beständig, und der Gröſse $\mathfrak{W}$ gleich seyen.

Da ferner $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} = \frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}}$; $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} = \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{X}}$; und da auch, wegen $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$; so sind die Gleichungen des *Durchmessers:*

$$y = \frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}} . x; \quad z = \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{X}} . x;$$

*) Einen einzigen Fall ausgenommen, von welchem sogleich die Rede seyn wird.

welche wegen $\frac{B}{A} = \frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}}$, $\frac{C}{A} = \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{X}}$ zugleich die der Hauptachsen sind; hieraus folgt weiter, daſs alle Hauptachsen einander parallel, und die Cosinusse der Winkel, welche sie mit den coordinirten Achsen machen, gleich $\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{W}}$, $\frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{W}}$, $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{W}}$ sind.

Zweiter Fall. Wenn $\mathfrak{X} = o$, $\mathfrak{Y} = o$, $\mathfrak{Z} = o$, in welchem Falle die Gröſse $\mathfrak{D}$ auch verschwindet, und das kleinste Hauptmoment $\left(\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{K}}\right)$ ebenfalls gleich Null wird; dann ist:

$$A = (\mathfrak{C} \,.\, y_{,} - \mathfrak{B} \,.\, z_{,}); \quad B = (\mathfrak{A} \,.\, z_{,} - \mathfrak{C} \,.\, x_{,});$$
$$C = (\mathfrak{B} \,.\, x_{,} - \mathfrak{A} \,.\, y_{,});$$
$$\text{und} \quad X = o; \quad Y = o; \quad Z = o.$$

Die Gleichungen des Durchmessers sind daher:

$$y = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} \,.\, x; \quad z = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} \,.\, x;$$

und geht also durch den Anfangspunct der Coordinaten.

24. Wenn beide Fälle zu gleicher Zeit Statt finden, d. i., wenn nicht nur $\mathfrak{A} = o$, $\mathfrak{B} = o$, $\mathfrak{C} = o$; sondern auch $\mathfrak{X} = o$, $\mathfrak{Y} = o$, $\mathfrak{Z} = o$; dann ist $A = o$, $B = o$, $C = o$, und nicht nur das Hauptmoment, sondern auch jedes andere Moment verschwindet, welches auch immer die Lage der Achse, auf die man das Moment bezieht, seyn mag. Man sagt in diesem Falle, daſs alle Kräſte am Systeme im Gleichgewichte sind. In der That sind jene *sechs* Gleichungen, welche die Beschaffenheit des Systemes und der an ihm wirksamen Kräfte enthalten, die Bedingungsgleichungen *des Gleichgewichtes der Kräfte* am Systeme.

Man kann auf dieselben Resultate direct dadurch geleitet werden, daſs man die Orte der Puncte sucht, in welchen K verschwindet. Denn da $K^2 = A^2 + B^2 + C^2$;

so kann diese Gröſse nicht anders gleich Null werden, als wenn $A=0$, $B=0$, $C=0$ wird. Wenn aus diesen Gleichungen die Gröſsen $x_{,} y_{,} z_{,}$ eliminirt werden; so wird man die Gleichung $\mathfrak{D}=0$ erhalten. Dann wird, wenn diese letzte Bedingungsgleichung erfüllt wird, von jenen drei Gleichungen eine jede die Folge der beiden andern seyn. Alle diese Puncte liegen sonach im Durchmesser selbst. Soll K für jeden Punct $(x_{,} y_{,} z_{,})$ verschwinden; so müssen nicht nur $\mathfrak{X}=0$, $\mathfrak{Y}=0$, $\mathfrak{Z}=0$, sondern auch die Coefficienten der Coordinaten $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ gleich Null seyn.

25. Wir wollen jetzt noch die Fälle betrachten, da zwei der Gröſsen ABC verschwinden, und es sey zuerst $B=0$, $C=0$. Das Hauptmoment reducirt sich in diesen Puncten auf A; diese Puncte selbst aber liegen in einer zum Durchmesser parallelen Geraden, deren Gleichungen seyn werden:

$$y_{,}=\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}x_{,}+\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{A}};\quad z_{,}=\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}x_{,}-\frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{A}};$$

die Gröſse des Hauptmomentes ist in diesen Puncten selbst $=\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}}$. Der Halbmesser des Cylinders, worauf sich diese Gerade befindet, ist ferner $=\frac{\mathfrak{D}\cdot\sqrt{(\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2)}}{\mathfrak{K}^2\cdot\mathfrak{A}}$. Da ferner $\cos.\eta=\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{K}}$ gefunden wird; so folgt hieraus, daſs der Winkel η, den die Hauptachse der Puncte der in Rede stehenden Geraden mit dem Durchmesser macht, eben derselbe sey, als jener, den der Durchmesser mit der Achse der x bildet.

Für die Puncte der Geraden, deren Gleichungen $A=0$, $C=0$ sind, hat man eben so als Hauptmoment den Ausdruck $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{B}}$, und der Halbmesser des Cylinders ist $\frac{\mathfrak{D}\cdot\sqrt{(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{C}^2)}}{\mathfrak{K}^2\cdot\mathfrak{B}}$. Ihre Hauptachsen sind gegen den Durch-

messer eben so stark geneigt, als dieser gegen die Achse y. Für die Gerade endlich, deren Gleichungen $A = 0$, $B = 0$ sind, und die auf einem Cylinder vom Durchmesser $\frac{\mathfrak{D} \cdot \sqrt{(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2)}}{\mathfrak{K}^2 \cdot \mathfrak{C}}$ liegt, hat man als Hauptmoment $\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{C}}$.

26. Betrachten wir die Relation

$$\mathfrak{X} + \mathfrak{C} \cdot y_{\prime} - \mathfrak{B} \cdot z_{\prime} = 0,$$

d. i. $A = 0$, als die Gleichung einer Ebene, welche auf der coordinirten Ebene yz senkrecht steht, und zum Durchmesser parallel ist; so wird für jeden Punct dieser Ebene der Werth des Hauptmomentes seyn:

$$K = \frac{1}{\mathfrak{B}} \sqrt{[(\mathfrak{D} - \mathfrak{C}.(\mathfrak{Z} + \mathfrak{C}.x_{\prime} - \mathfrak{A}.y_{\prime}))^2 + \mathfrak{B}^2.(\mathfrak{Z} + \mathfrak{B}x_{\prime} - \mathfrak{A}y_{\prime})]}.$$

Um die Puncte dieser Ebene zu bestimmen, in welchen das Hauptmoment am kleinsten wird, hat man die beiden Coordinaten aus den Gleichungen

$$\left(\frac{dK}{dx_{\prime}}\right) = 0, \quad \left(\frac{dK}{dy_{\prime}}\right) = 0$$

zu suchen. Jede von ihnen gibt aber die Gleichung

$$\mathfrak{C} \cdot B = \mathfrak{B} \cdot C \quad \text{oder}$$

$$(\mathfrak{Z} + \mathfrak{B} x_{\prime} - \mathfrak{A} y_{\prime}) = \left(\frac{\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{D}}{\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}\right)$$

$$\text{und} \quad (\mathfrak{Y} - \mathfrak{C} x_{\prime} + \mathfrak{A} z_{\prime}) = \frac{\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{D}}{\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2};$$

der Werth des Hauptmomentes ist also in diesem Falle $\frac{\mathfrak{D}}{\sqrt{(\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2)}}$; und der Halbmesser des Cylinders, worauf diese Gerade liegt, ist $\frac{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{D}}{\mathfrak{K}^2 \cdot \sqrt{(\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2)}}$. Diese Gerade ist offenbar die Berührungslinie der in Rede stehenden Ebene mit der Cylinderfläche.

Für die Projection des Durchmessers in der Ebene, deren Gleichung $\mathfrak{Y} + \mathfrak{A} \cdot z_{\prime} - \mathfrak{C} \cdot x_{\prime} = 0$ ist, findet man

eben so als das gröſste Hauptmoment: $\frac{\mathfrak{D}}{\sqrt{(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{C}^2)}}$; so wie endlich in allen Puncten der Projection des Durchmessers in der Ebene, deren Gleichung

$$\mathfrak{Z} + \mathfrak{B} \,.\, x_, - \mathfrak{A} \,.\, y_, = 0$$

ist, das Hauptmoment den Werth $\frac{\mathfrak{D}}{\sqrt{(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2)}}$ hat.

VI. Allgemeine Gleichungen der von den beweglichen Hauptachsen der Puncte gegebener Linien erzeugten Flächen.

27. In der Theorie der Momente der Kräfte verdient noch eine ganz besondere Classe von Aufgaben, welche sich gleichsam von selbst zur Betrachtung darbieten, unsere Aufmerksamkeit. Es ist nämlich von Interesse, die krummen Flächen kennen zu lernen, welche die beweglichen Hauptachsen der Puncte gegebener Linien beschreiben. Ich werde nun in Kürze die allgemeine Auflösung dieses Problems und einiger ähnlicher geben, und eine Anwendung davon in einigen besondern Fällen machen. Dieser schicke ich aber noch Folgendes voraus.

Nennt man die Coordinaten was immer für eines in der Richtung der Hauptachse liegenden Punctes M wie gewöhnlich $x\, y\, z$; so sind

$$A \,.\, (y - y_,) = B \,.\, (x - x_,)\,; \quad A \,.\, (z - z_,) = C \,.\, (x - x_,) \quad . \; (1)$$

die Gleichungen der Hauptachse des Punctes $(x_, \, y_, \, z_,)$.

Aus diesen Gleichungen lassen sich noch andere ableiten, welche man für sie gebrauchen kann, und die in gewissen Fällen nützliche Dienste leisten; daher ich sie hier noch entwickeln will.

Setzt man, um abzukürzen,

$$(\mathfrak{A} \,.\, x + \mathfrak{B} \,.\, y + \mathfrak{C} \,.\, z) = e\,;$$

so gibt die erste der Gleichungen (1):

$$\left(\frac{\mathfrak{X}.y - \mathfrak{Y}.x}{\mathfrak{C}}\right) + (xx_{,} + yy_{,} + zz_{,} - r_{,}^{2}) =$$
$$= + z_{,} . \left(\frac{e - \nu}{\mathfrak{C}}\right) + \left(\frac{\mathfrak{X}.y_{,} + \mathfrak{Y}.x_{,}}{\mathfrak{C}}\right);$$

und die andere liefert die Gleichung:

$$\left(\frac{\mathfrak{X}.z - \mathfrak{Z}.x}{\mathfrak{B}}\right) - (xx_{,} + yy_{,} + zz_{,} - r_{,}^{2}) =$$
$$= - y_{,} . \left(\frac{e - \nu}{\mathfrak{B}}\right) + \left(\frac{\mathfrak{X}.z_{,} - \mathfrak{Z}.x_{,}}{\mathfrak{B}}\right).$$

Verbindet man diese zwei Gleichungen; so ergibt sich daraus nach einigen einfachen Reductionen:

$$A . (e - \nu) = \mathfrak{D} . (x - x_{,}) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Neben dieser hat man noch die zwei ähnlichen:

$$B.(e - \nu) = \mathfrak{D}.(y - y_{,}); \quad C.(e - \nu) = \mathfrak{D}.(z - z_{,}) \quad . \quad (3)$$

Nennt man Δ den Abstand des Punctes $(x\,y\,z)$ von $(x_{,}\,y_{,}\,z_{,})$; so hat man, durch Verbindung dieser drei Gleichungen:

$$K . (e - \nu) = \mathfrak{D} . \Delta.$$

Jene drei Gleichungen lassen sich daher auch noch so schreiben:

$$A . \Delta = K . (x - x_{,}); \quad B . \Delta = K . (y - y_{,});$$
$$C . \Delta = K . (z - z_{,}).$$

Bezeichnet man die Hauptachse mit H, und die Winkel, so sie mit den coordinirten Achsen bildet, mit $(H.x)$, $(H.y)$, (H,z); so ist

$$A = K . \cos.(H . x); \quad B = K . \cos.(H . y);$$
$$C = K . \cos.(H . z).$$

Diese sind die bekannten Gleichungen, welche den Satz enthalten, daſs $A\ B\ C$ die Zerlegungen des Hauptmomentes K nach den coordinirten Achsen $x\,y\,z$ sind.

28. Wir wollen nun die Gleichungen (1) des vorigen Art. unter der folgenden Form darstellen:

$$\left.\begin{array}{l} y_{\prime} = f(x, y, z, x_{\prime}); \\ z_{\prime} = F(x, y, z, x_{\prime}); \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

Diese Gleichungen bestimmen für jeden Punct (xyz) des Raumes diejenige krumme Linie, in welcher die Puncte $(x_{\prime} y_{\prime} z_{\prime})$ liegen, deren Hauptachsen alle durch jenen Punct (xyz) gehen.

Wenn daher $y_{\prime} = \varphi(x_{\prime})$; $z_{\prime} = \psi(x_{\prime})$ die Gleichungen irgend einer krummen Linie sind; so braucht man nur aus den zwei Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} f(x, y, z, x_{\prime}) = \varphi(x_{\prime}); \\ F(x, y, z, x_{\prime}) = \psi(x_{\prime}); \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

die Gröſse $x_{\prime}$ zu eliminiren, um die Gleichung der Fläche zu erhalten, welche die Hauptachsen der Puncte $(x_{\prime} y_{\prime} z_{\prime})$ der gegebenen Curve beschreiben.

29. Wenn der Punct M (oder xyz) auf der beweglichen Hauptachse stets denselben Abstand vom Puncte S (oder $x_{\prime} y_{\prime} z_{\prime}$) behalten soll, den wir Δ nennen wollen; so findet man die Gleichungen der krummen Linie, welche der Punct M beschreibt, während die Hauptachse die verschiedenen Puncte einer gegebenen krummen Linie durchläuft, wenn man aus den Gleichungen (1) und der Bedingungsgleichung

$$(x - x_{\prime})^2 + (y - y_{\prime})^2 + z - z_{\prime})^2 = \Delta^2 \;. \quad (3)$$

die Gröſsen $y_{\prime}$ $z_{\prime}$ eliminirt, wodurch man eine Gleichung zwischen xyz und $x_{\prime}$ erhält, diese Gleichung mit den Gleichungen (2) verbindet, und endlich aus ihnen die Gröſse $x_{\prime}$ wegschafft.

Anstatt der Bedingungsgleichung (3) können noch andere gegeben seyn, wie z. B. diese, daſs die Hauptachse stets eine Tangente an der krummen Linie, wozu

$x\,y\,z$ gehören, oder eine Normale an ihr u. s. w. seyn soll. Wie nun auch immer die Bedingung beschaffen seyn mag, stets wird sich dieselbe durch eine Gleichung ausdrücken lassen, deren Verbindung mit den übrigen bekannten Gleichungen zu denen der gesuchten krummen Linie hinführt.

3o. Befinden sich die Puncte $(x_{,}\,y_{,}\,z_{,})$ auf einer gegebenen krummen Fläche, und frägt man nach den Orten der entsprechenden Puncte $(x\,y\,z)$, welche einerlei Abstand auf der Hauptachse vom Puncte $(x_{,}\,y_{,}\,z_{,})$ haben; so wird die allgemeine Auflösung dieses Problems im Folgenden bestehen.

Es sey

$$\Phi(x_{,},\,y_{,},\,z_{,}) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

die Gleichung der krummen Fläche, auf welcher sich die Puncte S befinden sollen; mit dieser verbinde man die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} y_{,} = f(x,\,y,\,z,\,x_{,}); \\ z_{,} = F(x,\,y,\,z,\,x_{,}). \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Die Werthe von $x_{,}\,y_{,}\,z_{,}$ aus diesen drei Gleichungen setze man noch in die Bedingungsgleichung:

$$(x - x_{,})^2 + (y - y_{,})^2 + (z - z_{,})^2 = \Delta^2; \quad . \quad (3)$$

so wird die resultirende Relation zwischen $x\,y\,z$ die Gleichung der gesuchten krummen Fläche seyn.

Diese allgemeinen Betrachtungen geben Stoff zu sehr interessanten Untersuchungen, welche ich hier abbreche, indem ich mich in ein gröſseres Detail nicht einlassen kann, und mich begnüge, im Allgemeinen bloſs den Weg gezeigt zu haben, wie Probleme dieser Gattung aufgelöst werden.

III.

Über die Erschütterung, welche Thiere in dem Momente erleiden, als sie aufhören den Verbindungsbogen zwischen den Polen eines Electromotors zu bilden, und über eine andere physiologische Wirkung der Electricität;

von

S t. M a r i a n i n i ,

Professor der Physik am Lyceum zu Venedig.

(In italienischer Sprache vom Hrn. Verfasser mitgetheilt, und übersetzt von Dr. *C. Hock.*)

Bei Wiederholung der Grundversuche, durch die *Volta* das passive Verhalten eines Frosches bei jenen Zuckungen bewies, in die er geräth, wenn er als Verbindungsbogen zweier ungleichartiger sich berührender Metalle dient, hat man oft bemerkt, daſs die Zuckungen in dem Momente sich wiederholen, in welchem der Frosch aus der Verbindung gebracht wird. *Volta* und *Fowler* haben zuerst auf dieſs Phänomen aufmerksam gemacht; es ward in der Folge von *Valli*, von mehreren Commissären der Pariser Academie der Wissenschaften, von *Ruthfort* und *Pfaff* gesehen, welcher letzterer diesen Umstand als einen wichtigen Einwurf gegen *Galvani's* sogenannte thierische Electricität betrachtete *). Eine Erklärung dieses Phänomens gab *Volta*; aber es scheint, dieser groſse Mann habe es nur eines flüchtigen Gedankens gewürdigt. Er spricht darüber nur im

---

*) S. *Histoire de Galvanisme, par P. Sues* d. ältere. Erster Theil, p. 22, 35, 144, 213.

Vorübergehen in einer Note zum §. 49 seiner berühmten Denkschrift über die Identität des electrischen und galvanischen Fluidums, und zwar folgender Maſsen: »Eine solche Zuckung tritt nur beim ersten Andrang des electrischen Fluidums ein, manchmal auch in dem Momente, wo der leitende Kreis unterbrochen und dadurch ein solcher Strom plötzlich aufgehalten oder vielmehr durch das plötzlich eintretende Hinderniſs umgekehrt wird, wie man sich leicht vorstellen kann *).« Diese Erklärung ward auch von andern Naturforschern angenommen, wie man aus dem §. 80 der vortrefflichen Denkschrift des Prof. *Configliacchi* (vom Jahre 1814) über die Identität des electrischen Fluidums mit dem sogenannten galvanischen ersieht.

Ich konnte nicht begreifen, wie durch eine Unterbrechung der Kette ein Umkehren des electrischen Stromes veranlaſst werden kann, und da mir daher diese Erscheinung äuſserst sonderbar schien; nahm ich mir vor, sie auf dem Erfahrungswege näher zu prüfen. Aber die Meinungen der groſsen Naturforscher, auch wenn sie nur das Resultat einer kurzen Überlegung zu seyn scheinen, verdienen gründliche Würdigung, ehe man sie verläſst; und ich unterwarf daher vor allem die Meinung *Volta's* einer gründlichen Prüfung, die ich auch hier mittheile, ehe ich die Auseinandersetzung meiner eigenen Arbeit beginne.

I. Es unterliegt keinem Zweifel, daſs nicht bei jeder Unterbrechung der Kette eine Zuckung in dem als Verbindungsbogen dienenden Thiere eintritt; allein unausgemittelt ist es, ob in solchen Fällen das Ausbleiben der Zuckungen durch den Nichteintritt der Ursache, die sie erzeugt, oder durch den Nichteintritt jener äuſsern

---

*) *Annali di Chimica del Brugnatelli.* 21ster Th. p. 199.

Umstände verursacht wird, die zum Gelingen des Versuches nothwendig sind. Über diesen Punct machte ich folgende Versuche:

Ein Frosch wurde so präparirt, daſs nur der Rumpf und die untern Extremitäten übrig blieben, das Rückenmark zerstört, und er mit dem einen Beine in ein Glas Wasser, mit dem zweiten in ein anderes gestellt, dann in das eine Glas eine Kupfer-, in das andere eine Zinkplatte gelegt. Als die metallische Berührung zwischen den beiden Platten hergestellt war, zuckte der Frosch; und kaum hatten seine Zuckungen aufgehört, als ich die Platten trennte, und da fand eine neue, aber etwas schwächere Erschütterung Statt. Die Kette ward von neuem geschlossen und dann wieder geöffnet; es erfolgte dasselbe, und so oft ich auch das Schlieſsen und Öffnen wiederholte, die Erscheinung blieb dieselbe. Doch wurden die Zuckungen beim Öffnen der Kette bei jedem neuen Versuche schwächer, und erschienen nach einiger Zeit gar nicht mehr. Ich legte dann den Frosch zwischen die Pole eines Electromotors mit vier Plattenpaaren, und die Zuckungen bei Öffnung der Kette erfolgten aufs neue; und auch hier wurden sie bei jedem neuen Versuche schwächer, und verloren sich endlich ganz. Aber nachdem ich vier neue Plattenpaare mit dem Electromotor verbunden hatte, erneuerten sich diese Zuckungen wieder. Ja sogar nach mehreren Stunden, in denen der Frosch den electrischen Strömen ausgesetzt war, zeigte er doch eine schwache Muskelbewegung bei der Öffnung der Kette eines Apparats von vierzig Plattenpaaren.

Mit einem ähnlichen Apparate werden die bei Öffnung der Kette eintretenden Erschütterungen auch an unseren Fingern fühlbar, wenn man den einen in die Flüssigkeit taucht, wo sich die äuſserste Kupferplatte,

den andern in die, wo sich die äuſserste Zinkplatte befindet.

Diese Versuche, welche ich mit gleichem Erfolge mehrmal wiederholte, zeigen, daſs in der Unterbrechung des electrischen Stromes die Grundursache des in Frage stehenden Phänomenes liegt, und daſs, wenn es unterbleibt, der Grund in der geringern Empfänglichkeit des Thieres für die electrische Erschütterung zu suchen ist.

II. Allein was geschieht mit dem electrischen Strome, der die *Volta*'sche Säule durchkreist, wenn plötzlich die Verbindung zwischen den Polen aufgehoben wird? Es ist wahr, wir können uns denken, daſs durch das momentane Hinderniſs, auf welches er stoſst, sein Lauf umgekehrt wird, wie eine Flüssigkeit in einem Canale rückwärts zu flieſsen anfängt, wenn eine plötzliche Hemmung eingetreten ist. Allein wenn wir die Sache nach den bisher angenommenen Principien zu erklären suchen, durch die *Volta* die wunderbare Wirkung seiner Electromotoren erklärte, können wir nicht so leicht die Überzeugung gewinnen, im Momente der Unterbrechung der Kette trete ein Rückfluſs des electrischen Stromes ein, und gar in solchem Grade, daſs er die thierischen Muskeln zu erschüttern vermag. Stellen wir in ein Glas mit Wasser eine Kupfer-, in ein anderes mit Wasser gefülltes Glas eine Zinkplatte, bringen die aus dem Wasser hervorragenden Theile der zwei Platten in Berührung, und ein präparirter Frosch, dessen untere Extremitäten in den beiden Gläsern stecken, schlieſse die Kette. Nun können wir die Kette auf verschiedene Weise unterbrechen: 1) wenn wir die metallische Berührung der zwei Platten aufheben; 2) wenn wir eine Platte aus der Flüssigkeit herausziehen, aber ohne sie von der andern zu trennen; 3) wenn wir einen Fuſs des Frosches aus der Flüssigkeit herausnehmen; 4) wenn wir beide

Füſse zu gleicher Zeit herausziehen, und wir wollen sehen, ob wir bei einer dieser Arten der Unterbrechung eine rückgängige Bewegung des electrischen Stromes gewahren können.

1. Wir können uns denken, daſs im Augenblicke der Berührung das Kupfer dem Zink Electricität mittheilt, welches diese an den flüssigen Leiter abgibt, durch den es wieder dem Kupfer zugeführt wird, so daſs das electrische Gleichgewicht sich wieder herstellt; aber da die Berührung fortdauert, theilt das Kupfer dem Zink von neuem eine gewisse Menge Electricität mit, die ihm auf demselben Wege wieder zurückerstattet wird, und diese Störungen und Wiederherstellungen des Gleichgewichtes folgen so rasch auf einander, daſs wir diesen Kreislauf des electrischen Fluidums für stätig halten. Heben wir nun die metallische Verbindung des Plattenpaares auf, so geschieht dieſs in einem jener Augenblicke, wo das Gleichgewicht sich hergestellt hat, und dann kann von gar keiner fernern Bewegung der Electricität die Rede seyn; oder die Trennung der zwei Metalle geschieht in einem Augenblicke, wo eben eine Störung des Gleichgewichtes eingetreten ist; und da wird das Zink seinen Überschuſs an Electricität an die Flüssigkeit abgeben, und diese Electricität wird durch den mineralischen Leiter in die Flüssigkeit des andern Glases übergehen, um dem Kupfer die verlorene Electricität zu ersetzen. Dieſs heiſst: Nach der Trennung der zwei Metalle dauert der electrische Strom noch eine sehr kurze Zeit fort, *aber in der vorigen Richtung*.

2. Heben wir eine, z. B. die Kupferplatte aus der Flüssigkeit, so geschieht dieſs entweder, nachdem die Kupferplatte die gewohnte Menge Electricität dem Zinke schon mitgetheilt hat, oder in dem Augenblicke, in dem sie das Zink zu laden im Begriffe ist; im ersten Falle

hört im Momente der Unterbrechung jede electrische Strömung auf, und im zweiten ist die Electricität zwischen dem Zink, der Flüssigkeit und dem Frosche vertheilt, aber es kann durchaus kein Zurückströmen der Electricität Statt finden. Heben wir die Zinkplatte aus der Flüssigkeit, so hört auch in diesem Falle entweder alsogleich jeder electrische Strom auf, oder es folgt noch eine sehr schwache und momentane Bewegung *in der vorigen Richtung,* je nachdem die electrische Gleichgewichtsstörung schon eingetreten ist, oder eben eintreten soll.

3. Hebt man beide Platten aus den Gläsern, so ist ein einziger Fall denkbar, in dem ein Zurückströmen des electrischen Fluidums Statt finden könnte, wann nämlich die Platten in dem Momente herausgezogen worden wären, in dem das in der Flüssigkeit vertheilte electrische Fluidum sich schon in dem Glase gesammelt hätte, worin das Kupfer stand, ohne jedoch dasselbe schon erreicht zu haben; denn da würde die angehäufte Electricität, da sie nicht mehr das Metall trifft, in das sie abfliefsen könnte, zum Theil zurückfliefsen, um sich in die Flüssigkeiten der beiden Gläser und den Frosch zu vertheilen. Allein hier mufs man bedenken, dafs die kleine Menge Electricität, welche vom Electromotor in der Flüssigkeit zurückgelassen wird, nicht hinreicht, die am Frosche beobachteten Zuckungen hervorzubringen; da es sogar eine ohne Vergleich gröfsere Menge Electricität, wie die ein mit einem kleinen Funken des Electrophors geladener Körper hat, nicht vermag.

Wenn wir nach denselben Grundsätzen untersuchen, was bei Unterbrechung der Kette durch Herausziehen eines oder beider Füfse des Frosches vorgeht, so sehen wir, dafs auch hier kein electrischer Strom in einer

Richtung eintreten kann, die der entgegengesetzt ist, welche der Strom vor Unterbrechung der Kette hatte.

Das hier in Bezug auf einen einfachen Electromotor Gesagte läſst sich gleichfalls auf einen zusammengesetzten anwenden. Wir sind daher zum Schlusse berechtiget, daſs die Grundsätze, auf die *Volta* seine Theorie der Electromotoren baute, uns nicht gestatten, im Momente der Unterbrechung der Kette ein Zurückströmen der Electricität anzunehmen, das einen Frosch in Zuckungen versetzen könnte.

III. Sollen wir also berechtiget seyn, ungeachtet des Widerspruches der bisher gangbaren Theorie, in dem Momente, wo man die Verbindung zwischen den Polen der *Volta*'schen Säule aufhebt, ein Zurückströmen der Electricität anzunehmen, so müssen andere Anzeigen als die erwähnten Zuckungen vorhanden seyn. Ich brachte daher die Zunge in einen von acht Plattenpaaren erregten Strom, aber nie empfand ich bei Unterbrechung der Kette auch nur im geringsten jenen eigenthümlichen Geschmack, den ein entgegengesetzter Strom hätte verursachen müssen. Ich habe in denselben Apparat einen Finger gebracht, der eine kleine Wunde hatte, aber jedes Mal, so oft ich die Kette unterbrach, hörte der brennende Schmerz, den ich erlitt, alsogleich auf, und nie empfand ich im Momente der Unterbrechung ein Steigen desselben. Die Lichtempfindung, die man hat, wenn der electrische Strom das Auge und die angrenzenden Theile durchstreicht, erneuerte sich zwar mit geringer Stärke, so oft man plötzlich die Kette unterbrach; allein eine solche Empfindung hängt bekanntlich nur von einer Bewegung im Auge selbst oder seinen benachbarten Theilen ab.

Ich habe auch einen Multiplicator der Einwirkung eines Becherapparats von zwanzig Plattenpaaren aus-

gesetzt, und als die Nadel vollkommen ruhig war (sie zeigte eine Abweichung von 8 Graden), die Kette unterbrochen; aber die Nadel fing in demselben Augenblicke an sich langsam dem magnetischen Meridiane zu nähern, ohne das geringste Anzeichen zu geben, sie habe im Momente der Unterbrechung des Umlaufes die Einwirkung eines entgegengesetzten Stromes empfunden. — Alles dieſs scheint mir zu beweisen, daſs man im Momente der Unterbrechung der Kette keinen Strom bemerken könne, dessen Richtung dem vor Öffnung der Kette Statt gefundenen entgegengesetzt wäre.

IV. Was veranlaſst nun die in Frage stehenden Zuckungen? *Volta's* schon oft besprochene Annahme leitete mich auf die Untersuchung, ob denn die bei Unterbrechung der Kette Statt findenden Zuckungen wirklich jenen ähnlich sind, die in dem Thiere ein Strom hervorbrächte, welcher dem entgegengesetzt wäre, der vor Öffnung der Kette auf dasselbe wirkte. Und ein merkwürdiger Versuch, den wir dem Genius dieses groſsen Forschers verdanken, setzte mich in den Stand, diese Untersuchung, die mir am Anfange äuſserst schwierig schien, mit einigem Glücke zu verfolgen.

Volta hat beobachtet, daſs ein mittelst seiner Füſse mit den Polen einer Säule in Verbindung stehender Frosch überhaupt binnen 25 bis 30 Minuten die Fähigkeit verliert, durch den Andrang des bisher bestehenden Stromes erschüttert zu werden; aber wohl kann er noch immer durch einen entgegengesetzten Strom erschüttert werden. Ich habe also einen ähnlichen Versuch gemacht, aber statt zu warten, daſs der Frosch die Fähigkeit, durch den electrischen Strom erschüttert zu werden, ganz verliere, öffnete ich von Zeit zu Zeit die Kette, um sie gleich hernach von neuem zu schlieſsen; und bemerkte durch mehrere Stunden, daſs in dem Maſse,

als die Erschütterungen beim Schliefsen der Kette schwächer wurden, die beim Öffnen derselben stärker eintraten. Hieraus wird ersichtlich, dafs die Unterbrechung des electrischen Stromes auf den Frosch eine ähnliche Wirkung ausübe, als ein entgegengesetzter Strom. Nur darf ich nicht verschweigen, dafs unter vier bis fünf auf die erwähnte Weise zugerichteten Fröschen ein einziger mir die obigen Resultate mit Klarheit darbot. Es war ein sehr lebhaftes und dickes Männchen, hatte grofse Empfindlichkeit und ein zähes Leben; denn nach siebzehn Stunden (seitdem er präparirt worden war) zeigte er noch dem unbewaffneten Auge Spuren von Zuckungen, wenn ein Apparat von vierzig Plattenpaaren auf ihn wirkte, obgleich er beinahe durch die ganze Zeit den Electromotoren ausgesetzt war.

V. Obgleich ich das (IV.) erwähnte Phänomen nur in einem Individuum klar ausgesprochen sah, meinte ich doch die *Volta*'sche Ansicht nicht verlassen zu dürfen; allein da ich gar keine andere Stütze für dieselbe fand, trachtete ich, durch irgend ein anderes Mittel zu beweisen, dafs die besprochenen Zuckungen nicht durch den im Momente der Unterbrechung der Kette zurückfliessenden electrischen Strom veranlafst werden. Ein solches Mittel ist folgendes:

Ich legte auf die gewöhnliche Weise einen Frosch mit seinen untern Extremitäten in die beiden äufsersten Zellen *(tazze)* eines Becherapparates von sechs Plattenpaaren, und als die Zuckungen, welche gewöhnlich einige Zeit andauern, wenn das Thier frisch präparirt ist, aufgehört hatten, brachte ich, statt die Kette zu unterbrechen, die Enden eines homogenen Metallbogens in dieselben zwei Schälchen, in denen die zwei Füfse des Frosches waren; aber in demselben Augenblicke zuckte dieser zusammen. Vielmal habe ich diesen Versuch wie-

derholt, und immer mit gleichem Erfolge. Und hier wird doch die Kette keineswegs unterbrochen, sondern bloſs mit groſser Schnelligkeit vom Frosche abgeleitet, da sich der Electricität ein besserer Leiter darbietet.

Als ich bei einem Becherapparat von vierzig Paaren, die durch Meerwasser von einander getrennt waren, zwei Finger meiner Hand an die äuſsersten Zellen hielt, habe auch ich diese Stöſse empfunden, als ich die Ende eines Metallbogens dorthin brachte, wo zugleich die Finger lagen; auch andere Personen erfuhren dasselbe, bei denen keine vorgefaſste Ansicht, keine Befangenheit zu vermuthen war.

Wenn ich die erwähnten Zuckungen mit jenen verglich, die bei Unterbrechung der Kette eintreten, fand ich sie stets schwächer. Aber dieſs darf uns nicht überraschen; denn ist wirklich das Aufhören des durch das Thier streichenden Stromes die Ursache der Erschütterung, so ist ja leicht einzusehen, daſs dieses Aufhören viel plötzlicher erfolgt, wenn man die Kette unterbricht, als wenn man einen Metallbogen in die Zellen stellt, in denen das Thier (im Wasser) steht, da dieses im letztern Falle noch immer einem Theile der Electricität zum Leiter dient.

VI. Nun wollte ich sehen, ob die Zuckungen, die das Thier erleidet, wenn man die Kette schlieſst, auf jene Einfluſs haben, in welche es bei Öffnung derselben geräth; oder mit andern Worten: ob die Erschütterung der Fibern bei Öffnung der Kette dadurch bedingt sey, daſs die beim Schlusse der Kette eintretenden Erschütterungen vorausgingen; ich fand, daſs dieſs nicht der Fall sey. Ich hatte nämlich einen Frosch an die Enden eines Electromotors von acht Paaren befestiget, in dem die electrische Strömung noch nicht eingeleitet worden war, und schloſs dann die Kette, indem ich in die Flüs-

sigkeit jener zweier Gläser (Becher), wo der Apparat unterbrochen war, zwei wohl getrocknete Finger der einen Hand tauchte; aber der Frosch gerieth nicht in Zuckungen, wohl aber zuckte er alsogleich zusammen, wenn man die Finger herauszog. Trockne Finger bieten beim ersten Eintauchen in die Flüssigkeit einen sehr schlechten Leiter dar, daher der electrische Strom sich nur langsam durch sie hindurch Bahn brechen kann, und seine ganze Geschwindigkeit erst erlangt, wann die Finger stark durchnetzt sind; allein da er am Ende doch diese Geschwindigkeit erlangt hat, so befindet sich der Frosch zuletzt auch in denselben Umständen, als wenn man die Kette gleich durch einen guten Leiter geschlossen hätte, und zeigt daher im Momente der Unterbrechung dieselbe Erscheinung. Ich habe diesen Versuch mit zwei andern trockenen Fingern wiederholt, nur daſs ich, statt die Kette zu unterbrechen, in die Zellen, in denen die Füſse des Frosches steckten, einen Metallbogen stellte; die Zuckungen blieben nicht aus.

Wenn wir daher weder durch Schlüsse noch Thatsachen berechtiget sind, ein Zurückströmen der Electricität im Apparate, nachdem die Verbindung zwischen den Polen aufgehoben wird, anzunehmen; wenn die Zuckungen des Thieres bei Hemmung des Stromes denen ähnlich sind, die durch einen entgegengesetzten Strom erzeugt werden; wenn zur Hervorrufung dieser Erschütterungen schon das bloſse Ableiten des Stromes von den Thierfibern hinreicht, und wenn es endlich für das Gelingen des Phänomens ganz gleichgültig ist, ob diese schon früher durch das Einwirken der Electricität in Zuckungen gerathen sind oder nicht: so kann ich mir diese Sache nur aus der Annahme erklären, daſs die Organe der Bewegung *(die Muskeln)* entweder wegen ihrer geringen Leitfähigkeit oder aus einer eigenthümlichen

Ursache nicht den gesammten electrischen Strom, der in sie eindringt, durchzuleiten vermögen, sondern einen Theil in sich aufnehmen, der bei jedem neuen Umlaufe vergröſsert wird, und daſs diese in den Nerven des Thieres so zu sagen verdichtete Electricität, sobald der vorher eingedrungene Strom aufhört oder eine andere Richtung nimmt, aus denselben hervorbricht und so eine Zuckung bewirkt.

Hier hätte ich meine Arbeit enden müssen, wäre mir nicht ein Factum bekannt worden, das einiges Licht sowohl über das betrachtete Phänomen, als vielleicht auch über ein anderes nicht minder wichtiges verbreitet. Auf dieses wollen wir nun übergehen.

VII. *Volta* hat, als er noch *Galvani's* Hypothese in Schutz nahm, beobachtet, daſs ein Frosch, den er als Verbindungsbogen zwischen den beiden Belegungen einer Leidner Flasche brauchte, in Zuckungen gerieth, wenn die mit $+E$ geladene Belegung mit den Nerven, die mit $-E$ geladene mit den Muskeln in Verbindung stand; dagegen ruhig blieb, wenn er mit den Nerven die mit $-E$ geladene Belegung, und die andere mit den Muskeln verband.

Lehot hat beobachtet, daſs, wenn man mit der einen Hand den Schenkel eines frisch präparirten Frosches hielt, und seinen Nerv mit einem Zinkstreifen in Berührung brachte, dessen Ende in Quecksilber getaucht war, und man einen Finger der andern Hand gleichfalls in die Flüssigkeit tauchte, der Schenkel augenblicklich in Zuckungen gerieth. Wenn man im Gegentheile den Nerv mit dem Quecksilber in Berührung bringt, und dieses Metall mit einer Zinkplatte berührt, die man in der andern, naſs gemachten Hand hält, so zeigen sich gar keine Zuckungen oder nur sehr schwache, so lange als die Empfindlichkeit nicht äuſserst geschwächt ist; aber

trennt man den Nerv vom Quecksilber, oder zerstört die Kette auf was immer für eine andere Art, so finden die Muskelbewegungen von neuem Statt. Herr *Lehot* hat dasselbe Resultat erhalten, wenn er was immer für zwei der folgenden Substanzen anwandte, als Zink, Blei, Zinn, Quecksilber, Wismuth, Kupfer, Silber, Graphit *).

Bellingeri, der diese Versuche des französischen Physikers weiter ausdehnte und mannigfach abänderte, hat unter andern gezeigt, daſs man diese Erscheinungen nicht nur mit einfachen Elementen, sondern auch mit zusammengesetzten Apparaten erhält. Ich will einige Versuche dieser Art anführen, die ich anstellen zu müssen glaubte.

VIII. Ein Frosch wurde so präparirt, daſs der Rumpf mit den untern Extremitäten nur mehr mittelst der beiden Cruralnervenbündel zusammenhing, dann wurde der Rumpf in die Zelle getaucht, in welche der positive Pol eines Electromotors auslief, und die beiden Auſsenglieder in die Zelle, wo der negative Pol endigte; da gerieth der Frosch in Zuckungen, so oft man die Kette schloſs; aber wenn man die Kette öffnete, gewahrte man gar keine oder höchstens eine äuſserst schwache Erschütterung. Aber kehrte man den Strom um, d. i. setzte man den Rumpf mit dem negativen, und die Auſsenglieder mit dem positiven Pole in Verbindung, so wandelte sich auch die Erscheinung um, und der Frosch gerieth nicht oder höchstens in äuſserst schwache Zuckungen, wenn man die Kette schloſs, aber in äuſserst starke, wenn man sie öffnete **). — Wenn man auch die obern Extremi-

---

*) *Histoire de Galvanisme etc. Tome II., p.* 124, 125.

**) Die kleine Erschütterung, die man im letzten Versuche beim Schlieſsen der Kette gewahrt, scheint ein Phänomen, das, wie so viele andere, mehr von der Schnelligkeit des Stroms, als von der Gröſse der Spannung

täten an dem Frosche läſst, gelingt doch der Versuch gleichfalls.

IX. Damit obige Erscheinung eintrete, ist keineswegs nothwendig, daſs der Rumpf und die Auſsenglieder des präparirten Frosches ganz unter Wasser stehen, wie es in dem eben erwähnten Versuche der Fall war. Denn armirt man mit Metallfolie oder mit einem gewöhnlichen Drahte den Rumpf und einen oder beide Schenkel des Frosches, und setzt die Armirung des Rumpfes mit dem negativen, die des Schenkels mit dem positiven Pole in Verbindung, so wird der Frosch nicht erschüttert, wenn man die Kette schlieſst, aber wohl, wenn man sie öffnet. Gibt man dem Strome die entgegengesetzte Richtung, so wird auch aus der Erscheinung die entgegengesetzte.

X. Schnitt man den Rumpf weg, und band die Nerven an einen Metallstreifen, so trat die Erscheinung gleichfalls ein, wenn man die Auſsenglieder oder ihre Armirung mit dem einen Ende des Apparats, und die Armatur der Nerven mit dem andern in Verbindung setzte.

XI. Es ist auch keineswegs nothwendig, daſs der electrische Strom aus den Auſsengliedern in die Nerven ströme; denn wenn man einen oder beide Nerven mit zwei schmalen Bleistreifen unterband, die, wiewohl sie einander sehr nahe waren, sich doch nicht berührten, und man den Streifen, der den Nerven an einem seinem Ursprunge nähern Durchschnitte umwunden hielt, mit dem negativen, und den andern Streifen mit dem posi-

---

abhängt. Denn unzählige Male habe ich gesehen, daſs es sich bei einem Apparate von ein oder zwei Paaren zeigte, aber nicht bei einem von sechs oder mehr Plattenpaaren. — Diese kleine Erschütterung tritt auch nur ein, wenn der Frosch viele Empfänglichkeit hat.

tiven Pole in Verbindung setzte, so gerieth er nicht in Zuckungen, aufser beim Unterbrechen der Kette *).

XII. Von welcher Natur die electromotorischen Elemente, der sie trennende Leiter, wie grofs oder klein die Spannung des Apparates war, nie unterblieb die Erscheinung. Ist die Zahl der Plattenpaare beständig, so hängt die Stärke der Erschütterungen, die der Frosch beim Unterbrechen der Plattenpaare erleidet, von der Leitfähigkeit der Flüssigkeit, und bleibt die Flüssigkeit unverändert, von der Anzahl der Plattenpaare ab; alles wie bei den gewöhnlichen Stöfsen. Bei genauer Vergleichung obiger Stöfse mit jenen, die der Frosch beim Schliefsen der Kette erleidet, fand ich, dafs sie unter gleichen Umständen im Allgemeinen von gleicher Stärke sind.

Um so viel möglich die Gröfse der Zuckungen zu messen, pflege ich den Frosch mit den zwei untern Aussengliedern in ein flaches und gegen unten in ein Knie gebeugtes Glas zu stellen, so dafs die Flüssigkeit bis dorthin reicht, wo die beiden Schenkel sich vereinigen; den Rumpf tauche ich zwei Drittheile seiner Länge nach in die Flüssigkeit eines zweiten dem ersten ähnlichen

*) Die in diesem und den drei folgenden §§. beschriebenen Versuche sind mit einigen der in dem erwähnten Memoire des Herrn *Bellingeri* identisch oder analog. Ich erhielt von dieser Denkschrift erst Nachricht, als die meine schon ganz vollendet und zum Drucke bereit lag. Diese Erinnerung wäre ganz überflüssig, wenn nicht verschiedene Abschriften dieser meiner Arbeit im Umlauf wären, in welchen ich *Bellingeri's* nicht erwähnte; und wenn ich nicht gerne gegen den berühmten Prof. *Gamboni* meine Dankbarkeit an den Tag gelegt hätte, der, als ihm eine solche Abschrift zu Gesichte kam, die Güte hatte, mich aufmerksam zu machen, welche Verbindlichkeit ich gegen Herrn *Bellingeri* zu erfüllen hätte.

Glases, und diese beiden Gläser (in denen zwei aus den äufsersten Zellen des Electromotors herabreichende Metallstreifen sich befinden) stelle ich so weit aus einander, dafs die beiden Nerven aus einander gespannt sind. Nun beobachte ich mit Aufmerksamkeit, wie weit die Schenkel (im Momente der Erschütterung) sich aus der Flüssigkeit herausheben, und nach dieser Gröfse vergleiche ich die Stärke der Erschütterungen.

XIII. Wenn man den Rumpf mit den Aufsengliedern mittelst der *Muskeln* in Verbindung läfst, mögen nun auch die Nerven daran seyn oder nicht, so geräth der Frosch in Zuckungen beim Schliefsen der Kette, aber gar nicht oder nur äufserst schwach bei Unterbrechung derselben, welche Richtung übrigens der electrische Strom habe. Dasselbe erfolgt, wenn die erwähnten Nerven zwar entblöfst, aber mit nassem Papier umwickelt oder in Wasser getaucht sind; und auch wenn der Rumpf durch einen Metallbogen mit dem Schenkel vereiniget ist, mögen nun die Nerven noch daran seyn oder nicht.

Auch ein Fufs allein zeigt dasselbe Phänomen, wenn man seinen Hauptnerven entblöfst und zwei Puncte desselben mittelst zweier Metalldrähte mit den Polen eines Electromotors in Verbindung setzt. Allein wenn man die Muskeln an den Nerven läfst, oder noch besser, wenn man den Nerven ganz wegnimmt, so geräth der Fufs nur dann in Zuckungen, wenn man die Kette schliefst, und welche Richtung übrigens der electrische Strom habe.

XIV. Weil also die Electricität, die aus einem Nerven in der Richtung seiner Verästung *) strömt, es ist,

*) Umschreibungen zu vermeiden, wollen wir von nun an sagen, die Electricität durchlaufe einen Nerv in der Richtung seines Ganges oder seiner Verästung, oder in

die den zur Erschütterung der thierischen Fibern nöthigen Reiz in ihm hervorruft, aber ihn nicht im Nerv erzeugt, wenn sie in der entgegengesetzten Richtung ausströmt, werden wir versucht anzunehmen, daſs in dem letztern Falle die Erschütterung dann eintritt, wenn die Electricität aufhört ferner in den Nerv einzudringen, eben weil ein Theil derselben, der im Nerv zurückgehalten worden war, nun, da der Strom stocket, wieder heraustritt, und daher die Fibern erschüttert, über welche der Nerv sich ausbreitet *). Ein für die Annahme von einer Anhäufung der Electricität in dem in erwähnter Richtung von ihr durchstrichenen Nerven, ihrem allmähligen Wiederheraustreten und Erschüttern der Muskeln im Momente, wo der Strom aufgehört hat, günstiger Umstand ist, daſs die Zuckungen beim Öffnen der Kette desto stärker sind, je längere Zeit sie geschlossen war.

Diese dadurch bewirkte Verstärkung der Zuckung, daſs die Kette durch längere Zeit geschlossen blieb, wird noch auffallender, wenn man die Strömung erschwert. Ein Becherapparat von acht Paaren, bei dem bloſs zwei Paare wirksam waren (die andern sechs wa-

---

entgegengesetzter Richtung, je nachdem der Punct, an dem die Electricität in den Nerv tritt, dessen Ursprunge näher oder entfernter liegt, als der Punct, an dem die Electricität den Nerv verläſst.

*) Einer der von Herrn *Lehot* rücksichtlich der theoretischen Ansicht des Galvanismus angenommenen Grundsätze ist folgender: Wenn man eine wirksame Kette zerstört, so kehrt das in dem Organe (des als Leiter dienenden Thieres) durch Bildung dieser Kette angehäufte Fluidum auf seinen vorigen Ort zurück, und es bildet sich ein Strom in einer dem vorigen entgegengesetzten Richtung.

ren aus kleinen Messingbogen zusammengesetzt), setzte, wie gewöhnlich, einen frisch präparirten Frosch jedes Mal in Zuckungen, als der Strom vom Rumpf in die Glieder ging; hatte er die entgegengesetzte Richtung, so trat die Erschütterung nicht beim Schlusse der Kette, sondern beim Öffnen derselben ein; und in letzterem Falle wurde bemerkt, dafs, wenn die Kette nur einen Augenblick geschlossen war, die Zuckung beim Öffnen derselben viel schwächer war, als wenn sie eine längere Zeit hindurch geschlossen blieb *).

Bei diesem Versuche bemerkte man die stärkste Erschütterung, wenn die Kette durch 8 — 10 Secunden geschlossen geblieben war, sie war beinahe drei Mal so stark als jene, die man erhielt, wenn die Kette nur einen Augenblick lang geschlossen war **).

---

*) Könnte man die Zeit, in der die Kette geschlossen bleibt, auf eine unendlich kleine Gröfse bringen, so scheint es, würde bei obigem Versuch gar keine Erschütterung Statt finden. Wenn ich mich nicht irre, so geräth der Frosch bei dem §. 7 erwähnten Versuche *Volta's* nicht in Zuckungen, wenn die Entladung der Leidner Flasche in der Richtung von den Muskeln zu den Nerven geht, weil hier das Eintreten und Hemmen des electrischen Kreislaufes in ein Moment zusammenfällt.

**) Dafs die fortwährende oder wiederholte Einwirkung der electrischen Ströme auf die thierischen Organe in ihnen Electricität anhäufe, die dann mit einem Male ihren Einflufs auf dieselben äufsern, beweisen vielleicht auch folgende Thatsachen:

Als ich einen jungen Menschen von 25 Jahren *(Baptist Forcoin)*, der mit der Paraplexie behaftet war, in kleinen und wiederholten Stöfsen mittelst des Becherapparats electrisirte, mufste ich bemerken, dafs sich nach einer gewissen Anzahl Stöfse der Kranke über einen lebhaften Schmerz in der Gegend der Lenden beklagte, gerade dort, wo er einige Narben hatte, die von der Acu-

XV. Allein obgleich die im vorigen Paragraphe erwähnte Erfahrung gedachte Annahme zu unterstützen schien, zeigte sich doch etwas, das ihr widerspricht. Zwei Frösche wurden auf die gewöhnliche Weise präparirt, der eine mit den Aufsengliedern (Extremitäten) an den negativen, der andere mit den Aufsengliedern an den positiven Pol eines Electromotors befestiget, und beide Rumpfe in die Flüssigkeit desselben Glases ge-

---

punctur herrührten, welche er einige Monate vorher erhalten hatte. Dieses lästige, aber vorübergehende, und wie der Stofs selbst nur augenblickliche Gefühl wurde von dem Kranken mit einem Stich oder einer tiefen Wunde verglichen. — Die Stöfse waren dadurch beigebracht worden, dafs man einen Fufs des Kranken mit dem positiven, den andern mit dem negativen Pol des Apparats mittelst Bleistreifen und angefeuchteten Kissen *(cuscinetti)* in Verbindung brachte.

War der Apparat gut isolirt und abgetrocknet, und wurden hundert Paare angewendet, so spürte der Kranke diefs unangenehme Gefühl zwischen dem 13ten und 17ten Stofse; nahm man nur achtzig Paare, so fiel diese Empfindung zwischen dem 25sten und 32sten Stofs, bei einem Apparat von vierzig Paaren etwas nach dem 70sten, und endlich bei einem Apparat von zehn Paaren hatte der Kranke diese Empfindung erst nach 160 Stöfsen, und um vieles schwächer als die andern Male. Die Muskelzuckungen waren bei dem Apparate von zehn Paaren gar nicht merkbar.

An einem anderen Individuum *(Pietro Martinuzzi)*, der an derselben Krankheit litt, zeigte sich die Erscheinung, dafs er nach einer bestimmten Anzahl Stöfse einen spürte, der alle früheren an Stärke übertraf. Allein es ist genug, hier diese Erscheinungen nur erwähnt zu haben; ich behalte mir vor, sie ausführlicher zu behandeln, wenn ich die Geschichte mehrerer paralytischer Krankheiten bekannt machen werde, unter deren Heilmittel die Electricität zu rechnen ist.

taucht. Da gerieth, so oft man die Kette schloſs, der erste Frosch in Zuckungen, der zweite nicht; und wenn man den zweiten Frosch in die entgegengesetzte Lage, d. i. den Rumpf dorthin, wo früher die Auſsenglieder waren, und diese an des Rumpfes Stelle brachte, wurden beide Frösche erschüttert beim Schlieſsen der Kette, und keiner von beiden beim Öffnen derselben. Kehrte man endlich auch letztere Lage beider Frösche um, d. i. wurde der erste mit den Auſsengliedern an den negativen Pol, der zweite mit dem Rumpf an den positiven Pol befestiget, während der Rumpf des ersten in dem Glase unter Wasser gesetzt ist, in dem auch die Auſsenglieder des zweiten sich befinden: so ward keiner von beiden beim Schlieſsen der Kette, jeder aus ihnen beim Öffnen derselben erschüttert. Zwar sind diese Erschütterungen immer etwas schwächer, als wenn man nur mit einem Frosche experimentirt; allein eben weil sie stets schwächer sind, und nicht bloſs dann, wenn in einem von ihnen der Strom von den Gliedern zum Rumpfe, in dem andern vom Rumpfe zu den Gliedern geht, ersieht man, daſs diese Schwächung des Effects nicht von einem Hindernisse herrühre, das die Nerven dem electrischen Strome dann entgegen stellen, wenn er sie in einer ihrem Gange entgegengesetzten Richtung durchdringt, oder von einer Art einpoliger Leitfähigkeit, sondern davon, daſs das electrische Fluidum mehr Hindernisse zu bekämpfen hat, wenn es durch zwei Frösche hinter einander, als wenn es nur durch einen dringen muſs.

Um die Verschiedenheit zwischen den Wirkungen, welche man beim Experimentiren mit einem Frosche, und jenen, welche man beim Experimentiren mit zwei auf die erwähnte Weise gestellten Fröschen erhält, recht einzusehen, darf man nur Apparate von wenigen, etwa

zwei, drei bis vier Plattenpaaren brauchen. Man kann diese Versuche auf mancherlei Art abändern, indem man drei oder mehr Frösche anwendet; allein die Resultate werden vielleicht mehr Vergnügen, aber gewifs nicht mehr Belehrung gewähren.

XVI. Während wir indefs abwarten, bis neue Entdeckungen uns in den Stand setzen, zu erklären, warum denn eigentlich dann, wenn die Electricität die Nerven in einer ihrem Gange entgegengesetzten Richtung durchstreicht, im Momente der Öffnung der Kette eine Zuckung Statt findet, will ich mich hier auf die Bemerkung beschränken, dafs aus dieser Erscheinung sich höchst wahrscheinlich die kleinen Erschütterungen ableiten lassen, welche die Thiere in dem Momente erleiden, wo sie aufhören den Verbindungsbogen zwischen den Polen eines electromotorischen Apparats zu bilden.

Vor Allem müssen wir zuerst beachten, dafs alle Umstände, welche zur Hervorbringung oder Abänderung des einen dieser Phänomene beitragen, auch das andere hervorzubringen oder abzuändern vermögen. Auch hier z. B. ist es nicht nöthig, den electrischen Strom, der aus den Nerven in einer ihrem Gange entgegengesetzten Richtung hervordringt, zu unterbrechen, damit eine Erschütterung Statt finde; sondern zur Erschütterung des Frosches ist es hinreichend, den electrischen Strom dadurch von den Nerven zu entfernen, dafs man einen Metallbogen in die äufsersten Zellen des Apparates bringt. Ferner, wenn der Electromotor, der auf die Nerven des Frosches wirkt, aus einer bestimmten Anzahl Paare, wie z. B. aus zwanzig, dreifsig oder mehreren besteht, ist es keineswegs nothwendig, den ganzen Strom abzuleiten, sondern es genügt die Unterdrückung seines gröfsten Theiles, indem man den Metallbogen in die zweite

und vorletzte, oder in andere zwei von diesen nicht sehr entfernte Zellen bringt. Ferner hat keines der beiden Phänomene Statt, wenn man die Kette nach und nach auflöst, oder den electrischen Strom nur allmählig vom Thiere entfernt.

Zweitens scheint es, daſs bei jedem electrischen Strome, der die Bewegungsorgane eines Thieres durchstreift, ein Theil desselben in irgend einen Nerv in einer dessen Gange entgegengesetzten Richtung eindringt, und dadurch bei Hemmung des Umlaufes die Muskeln, an welchen der Nerv sich verästet, zusammenzucken. Wenn man z. B. einen Frosch auf die Weise stellt, daſs die eine seiner untern Extremitäten am positiven, die andere am negativen Pol sich befindet, so bewegt sich im ersten Fuſse, sobald man die Kette schlieſst, der electrische Strom in einer dem Gange der Nerven entgegengesetzten Richtung, und im zweiten folget er dem Gange der Nerven. Daher wird der letztere beim Schliessen der Kette, ersterer beim Öffnen derselben erschüttert. Und da die Schenkel mit einander vereiniget sind, so überträgt die Zuckung des einen die Bewegung in den anderen, und es scheinen daher jedes Mal beide erschüttert zu werden. Und wenn in diesem Falle die Erschütterungen, so beim Unterbrechen der Kette eintreten, dennoch schwächer sind als jene, die beim Schliessen derselben Statt finden, so rührt dieſs daher, daſs der Nerv nicht bloſsgelegt ist, und daher nur wenig Electricität ihn durchströmt. Man kann sich leicht überzeugen, daſs die Sache sich so verhalten muſs, wenn man einen Fuſs vom andern trennt, und beide nur mit dem Rumpfe mittelst ihrer Nerven zusammenhängen läſst, und übrigens, wie vorher, einen Fuſs mit dem negativen, den andern mit dem positiven Pol in Verbindung setzt;

da zuckt der erste, so oft man die Kette schliefst, der zweite, so oft man sie öffnet *).

Drittens, wenn man einen Frosch präparirt, ohne die Lenden zu trennen, aber dagegen die Cruralnerven herausschneidet, so werden seine Aufsenglieder nur beim Schliefsen der Kette erschüttert, welche Richtung der Strom auch habe. Dasselbe zeigt sich, wenn wir die Glieder mit dem Rumpfe durch zwei Muskelbänder vereiniget lassen, oder wenn wir mit einem Fufs oder einer Muskel allein experimentiren.

Man ersieht indefs aus dem Vorausgegangenen, dafs ein bedeutender Unterschied zwischen den Erschütterungen obwaltet, welche durch unmittelbare Einwirkung der Electricität auf die Muskeln hervorgebracht werden, und die wir defswegen *idiopathische* Zuckungen nennen wollen, und jenen, welche aus der Einwirkung der Electricität auf die Nerven entstehen, welche die Bewegungen der Muskeln leiten, und welche wir *sympatische* Zuckungen heifsen können. Und wir müssen diesen Unterschied stets berücksichtigen, wenn wir den bisher erwähnten ähnliche Versuche machen wollen, um nicht manches Mal in Irrthum geführt zu werden.

XVII. Wir haben gesehen (XIV.), dafs wenn das electrische Fluidum einen Nerven von seinem Ursprunge an bis zu seinem Ende, oder wenigstens in dieser Richtung durchströmt, ein Stofs erfolgt, aber dieser nicht Statt findet, wenn das Fluidum den Nerv in entgegengesetzter Richtung durchströmt. Diefs würde kein Staunen erregen, wenn nach unserer anfänglichen Annahme der Nerv wegen einer gewissen einpoligen Leitfähigkeit

---

*) Eine der gegenwärtigen analoge Erfahrung ist auseinandergesetzt in der schon erwähnten *Histoire* von *Lehot*. Th. 2, S. 134.

oder besondern Eigenschaft den Durchgang der Electricität entweder ganz hinderte, oder doch erschwerte; allein diese Annahme haben wir irrig gefunden. Warum also äuſsert die Electricität, welche, wenn sie einen Nerv nach der Richtung seines Ganges durchströmt, eine so bedeutende Wirkung hervorbringt, gar keine Wirkung, wenn sie ihn in entgegengesetzter Richtung durchströmt? Wir wissen, daſs, wenn in Folge unseres freien Willens ein Muskel sich zusammenzieht, etwas vom Ursprunge des Nervs ausgeht und sich verbreitet, das bis zu diesem Muskel bis an sein Ende sich hinzieht; und daſs, wenn ein empfindendes Wesen den Eindruck gewahr wird, den ein Gegenstand auf eines seiner Organe macht, etwas vorhanden seyn muſs, das vom Ende des angeregten Nervs ausgeht, und bis an dessen Ursprung sich verbreitet. Wenn daher die Electricität dann eine Zuckung erzeugt, wenn sie vom Ursprunge der Nerven bis an ihr Ende strömt, sollte sie nicht auch, wenn sie die Nerven im entgegengesetzten Sinne durchströmt, eine Empfindung veranlassen? Die von *Volta* entdeckte Thatsache, daſs wenn man eine von der Oberhaut entblöſste Stelle in die Kette eines Electromotors bringt, die schmerzhafte Empfindung in diesem Theile stärker ist, wenn er sich am negativen Pole befindet, ist dieser Behauptung keineswegs günstig. Allein da ich dessen ungeachtet bedachte, daſs die lebhaftere Empfindung, welche man am negativen Pole hat, auch von den Stoffen herrühren kann, welche sich dort entwickeln, und nicht von einer mechanischen Einwirkung der Electricität, entschloſs ich mich über diesen Gegenstand einige Versuche anzustellen, welche ich hier kurz beschreibe.

XVIII. Ein Frosch wurde so präparirt, daſs seine untern mit einander verbundenen Auſsenglieder an dem übrigen Leibe nur mittelst der bloſs gelegten und wohl

geputzten Cruralnerven hingen, und zwar ohne dem Frosch selbst die Haut und den Kopf abzutrennen, und indem man das Eingeweide so wenig als möglich aus der Ordnung brachte. In diesem Zustande wurde er mit den Hinterfüſsen in die Zelle gebracht, wo die erste Kupferplatte des Electromotors stand, und die Vorderfüſse tauchte man in die Flüssigkeit, in der die letzte Zinkplatte sich befand, so daſs der Frosch mit dem Kopfe und der Brust auf den Rand der Zelle gestützt war. Als man hernach die Kette schloſs, gerieth der Frosch in Zuckungen, vorzüglich in den Hinterfüſsen *), aber er verrieth kein Anzeichen eines Schmerzes, obwohl man die Kette durch beinahe zwanzig Secunden geschlossen lieſs. Ohne den Frosch aus der Lage zu bringen, in der er sich befand, kehrte ich die Aufeinanderfolge der Platten um, und als ich hierauf die Kette schloſs, zuckte der Frosch zusammen, aber viel weniger als das erste Mal, und nach einem Momente begann er ängstlich zu athmen, d. i. er blies sich stark auf, zog dann den rechten Fuſs aus der Flüssigkeit, und setzte ihn auf den Rand der Zelle; als die Circulation wieder aufgehoben wurde, fuhr er zusammen, und wurde hierauf wieder ruhig. Ich stellte die Platten abermals in die Ordnung, in der sie am Anfange des Versuches waren; mit dem Schlusse der Kette wurde der Frosch erschüttert, aber er gab kein Zeichen, daſs er etwa die Zeit hindurch, in der die Kette geschlossen war — ungefähr eine Minute — schmerzlich angeregt gewesen sey. Ich kehrte von neuem die Folge der Platten um, und der Frosch zeigte von neuem, wie hart der electrische Strom ihm falle. Beim

*) Es ist unnütz, hier die Stöſse anzudeuten, die durch unmittelbare Einwirkung des electrischen Stromes auf die Muskeln der Vorderfüſse, des Rückens u. s. w. hervorgebracht wurden.

dritten Wechsel bewegte der Frosch nur ein wenig den Fuſs und die Seiten, beim vierten zeigte er erst nach beinahe einer Minute, während welcher er in der Kette sich befand, schwache Spuren von Schmerz; und dieſs waren überhaupt die letzten, die man bemerken konnte.

Einige Male habe ich dennoch bemerkt, daſs wenn der electrische Strom die Nerven in der Richtung ihrer Verästung durchströmte, das Thier Anzeichen von Schmerz auch in dem Momente äuſserte, in dem die Kette aufgehoben worden war.

Der Electromotor bestand aus zehn Plattenpaaren, die Flüssigkeit war Regenwasser, das eine Auflösung von etwa dem fünfzigsten Theil Kochsalz enthielt.

XIX. Statt den Frosch auf die im vorigen Paragraphe beschriebene Weise zu präpariren, kann man die obere Hälfte des einen seiner Cruralnerven bloſslegen (ohne dem Fleische den geringsten Schaden zuzufügen), und wenn man ihm ein kleines Siegellackplättchen untergelegt hat, um ihn zum Theile auſser Berührung mit den unten liegenden nassen Theilen zu bringen, armirt man das so frei liegende Stück an zwei verschiedenen Querschnitten mit zwei dünnen Staniolstreifen, und setzt einen derselben mit dem positiven, den andern mit dem negativen Pol eines *Volta*'schen Apparats in Verbindung. Nur muſs man bedenken, daſs, wenn man auf diese Weise verfährt, es beim ersten Anblicke scheint, als wenn die Phänomene ganz verkehrt vor sich gingen. Denn communicirt der dem Rumpfe nähere Streifen mit dem positiven Pole, so gibt das Thier Zeichen von Schmerz, und wenn mit demselben Pole jener Streifen in Verbindung steht, der den Nerv an dem vom Rumpfe entfernteren Querschnitte umfaſst, kann man nichts als die gewöhnliche Zuckung bemerken. Allein im gegen-

wärtigen Falle durchläuft das electrische Fluidum, wenn es von der Belegung, die mit dem positiven Pole in Verband steht, zu der abströmen will, die mit dem negativen Pole sich vereinigt, nicht jenes Stück des Nerven, das von den beiden Belegungen eingeschlossen ist, sondern es fliefst durch die Eingeweide, als die viel besseren Leiter; daher, wenn die dem Rumpfe nähere Belegung des Nervs am positiven Pole sich befindet, der electrische Strom oder wenigstens der gröfste Theil desselben sich in einer dem Gange des Nervs entgegengesetzten sich bewegt, und defshalb das Thier, aufser den Zuckungen in den vom electrischen Fluidum durchstrichenen Muskeln, noch Anzeichen eiuer schmerzhaften Empfindung an den Tag legt; und wenn gedachte Belegung mit dem negativen Pol in Verbindung steht, so bewegt sich der electrische Strom oder wenigstens der gröfste Theil desselben in der Richtung der Verästung des Nervs, und daher geräth der Frosch wohl in Zuckung, gibt aber kein Zeichen, dafs er von aufsergewöhnlichen Empfindungen ergriffen sey.

XX. Präparire man nun den Frosch auf die eine oder die andere der erwähnten Arten, nie sind die angezeigten Resultate leicht zu erhalten. Wenn die Nerven zum wenigsten in einer bestimmten Strecke vor der Berührung feuchter Körper nicht hinlänglich behütet, wenn sie mit Blut gefüllt oder mit irgend einer Feuchtigkeit benetzt, oder nicht gut gereinigt und von den Faserchen befreit worden sind, die gewöhnlich an ihnen hängen, erhält man nur dunkle und zweideutige Erfolge. Am meisten mufs die Aufmerksamkeit darauf gerichtet seyn, dafs die Electricität keinen andern Weg, als eben die Nerven habe, um von den Vordertheilen zu den Schenkeln zu gelangen, wenn der Frosch auf die erste Art präparirt ist, oder von der einen Belegung zur an-

dern, wenn der Frosch gerade nach der zweiten Art zugerichtet worden ist. Nicht minder streng muſs man darauf sehen, daſs der Electromotor gut isolirt sey, d. i. daſs jede Zelle von auſsen gut abgetrocknet werde, denn sonst werden die, wiewohl kleinen, electrischen Ströme, die in diesem Falle das Thier durchstreichen, leicht die Reinheit der Resultate beflecken, und das Thier selbst so matt machen, daſs es in kurzer Zeit nur Zuckungen, wie im trocknen Zustande, zeigt.

Überdieſs muſs ich bekennen, daſs trotz aller dieser Vorsichten sich das Thier einige Mal, als kaum die Herrichtung desselben vollendet war, wie in einem Zustande der Starrsucht befand, und auſser den Zuckungen kein anderes Zeichen eines Eindruckes der electrischen Ströme von sich gab. Ob dieſs von den bei der Herrichtung ausgestandenen Qualen oder von dem Zustande seiner Gesundheit, seines Alters, Temperaments, von der Behandlung, welche es litt, nachdem man es aus seinem Elemente genommen hatte, oder von andern Umständen abhänge, konnte ich bis jetzt noch nicht bestimmen.

Manchmal, während das Thier, wenn es eben erst präparirt war, nur zweideutige Resultate gab, zeigte es ganz deutliche, wenn man es einige Minuten hatte ausruhen lassen.

Gewöhnlich gibt der auf die zweite Art präparirte Frosch, wenn auch das Innere nicht im geringsten beunruhigt worden ist, und er viel mehr Lebenskraft behält, doch viel dunklere Resultate, als wenn er auf die erste Art präparirt wurde. Es scheint, daſs im letzteren Falle der beinahe gänzliche Blutverlust (denn man hatte die Aorta quer durchschnitten) dazu beiträgt, das Thier mehr gefühllos für den Zustand, in dem es sich befindet, und daher tauglicher zu machen, die *Schmerz*

*erregende**) Wirkung der Electricität zu empfinden, oder wenigstens diese Empfindung zu erkennen zu geben.

Manchmal, wenn sich bei einem Apparate von sechs oder sieben Paaren keine Symptome einer Schmerzempfindung zeigten, offenbarten sie sich, wenn ich einen Apparat von dreifsig Paaren an dessen Stelle brachte; ein anderes Mal war dieser Wechsel der Apparate unnütz.

Vielleicht werde ich diese Resultate leichter erhalten, wenn ich mit andern Thieren experimentiren werde, was ich bis jetzt nicht thun konnte. Aber auch, wenn man sich auf Frösche beschränkt, glaube ich, dafs jeder, der diese Versuche zu wiederholen Lust hat, mit ein wenig Geduld genügende Resultate erhalten wird. Und wahrlich nur dadurch, dafs ich nicht so schnell die Geduld verlor, gelang mir ein Versuch, dessen Resultate meine Erwartung weit überstiegen. Der Versuch war folgender:

XXI. Ein junger, weiblicher Frosch von mittlerer Dicke, lebhaft und ein grofser Quacker, wurde eine Stunde, nachdem ich ihn vom Fischhändler erhalten hatte, rücklings auf einer Holzleiste ausgespannt, an welcher die Hinterfüfse zusammen durch eine Schleife, und jeder der Vorderfüfse durch eine andere befestiget waren, so zwar, dafs das Athemholen nicht im Geringsten erschwert war. Hierauf wurde er auf die erste Art präparirt, d. i. so, dafs die Hinterfüfse mit dem übrigen Leibe nur durch die beiden Cruralnerven zusammenhingen. Hierauf wurde der Frosch alsogleich losgebunden, der rechte Vorderfufs mit einem Bleistreifen umwickelt, dessen anderes Ende mit einem Pole eines *Volta*'schen Apparates in Verbindung stand, die Hinterfüfse wurden

---

*) Ich gebe ihr diesen Namen, um sie von der *erschütternden* Wirkung zu unterscheiden.

beide zusammen mit einem zweiten Bleistreifen umwickelt, der mit dem andern Pole communicirte. Der Frosch wurde mit den Vorderfüſsen und dem Bauche auf eine Glasplatte gelehnt, und die Hinterfüſse wurden mit der Hand, an welcher ich einen isolirenden Handschuh trug, in die Höhe gehalten. Nach ungefähr einer Minute, als alles so geordnet war und der Frosch sich hinlänglich ruhig zeigte, begann ich ihn den electrischen Strömen auszusetzen, und erhielt folgende Resultate:

Wenn der electrische Strom die Nerven in der Richtung ihres Ganges durchströmte, zuckte der Frosch die Hinterfüſse zusammen, wenn man die Kette schloſs, und wenn man sie unterbrach, stieſs er einen starken und anhaltenden Schrei mit aller Kraft seiner Lunge aus, indem er sich zu gleicher Zeit auf seinen Vorderfüſsen erhob und sich zusammen krümmte; allein die Hinterfüſse geriethen nicht in Zuckungen. Durchdrang aber der electrische Strom die Nerven in einer ihrem Gange entgegengesetzten Richtung, da gab der Frosch beim Schlieſsen der Kette einen starken, von Convulsionen begleiteten Schrei von sich, einen Schrei, den er zwei-, drei- bis vier Mal wiederholte, wenn man die Kette durch einige Zeit geschlossen lieſs; und wenn man die Kette löste, so zuckten die Hinterfüſse zusammen, und der Frosch hörte auf zu schreien und sich zusammen zu winden.

Diesen Wechsel der Erscheinungen beobachtete ich mit einem und auch mit drei und acht Plattenpaaren, im Ganzen zehn bis zwölf Mal.

Nachdem ich so sichere Resultate erhalten habe, glaube ich Folgendes festsetzen zu können: Wenn das electrische Fluidum einen Nerv in der Richtung seiner Verästung durchströmt, bringt es eine Muskelzuckung hervor, und im Momente, wo es aufhört in den Nerv

einzudringen, eine Empfindung *); und wenn das electrische Fluidum in einer seinem Gange entgegengesetzten Richtung durchstreicht, bringt es eine Empfindung hervor, und im Momente, wo es einzudringen aufhört, findet die Muskelzuckung Statt **).

XXII. Wenn man indeſs betrachtet, daſs im Momente, wo die Einwirkung eines electrischen Stromes auf einen Nerv aufhört, gerade jene Affection eintritt, die ein dem vorigen entgegengesetzter Strom hervorbringen würde, scheint wiederum die Hypothese zulässig, daſs die Nerven die Eigenschaft besitzen, einen Theil der sie durchströmenden Electricität zurückzuhalten, welche sie dann in der entgegengesetzten Richtung durchzieht, sobald die Circulation gehemmt worden ist. Allein man sollte nun beweisen, daſs diese Organe wirklich diese Eigenschaft hätten, was jedoch äuſserst schwierig ist; und wenn man wirklich diesen Beweis geführt hätte, müſste man noch begreiflich machen, warum denn die in den Nerven zurückgehaltene Electricität eine Bewegung annimmt, die derjenigen entgegengesetzt ist, welche sie in die Nerven gebracht hat. Gewiſs würde man viel schneller eine Erklärung aller Phänomene dieser Art geben können, wenn man zugäbe, daſs es in den Nerven *natürliche* electrische Ströme gebe, welche, durch die künstlichen Ströme verdrängt, mit Gewalt wieder hervortreten, sobald letztere aufgehört hätten.

Wenn es eine thierische Electricität gibt, wie *Galvani* immer behauptet hat, oder, was vielleicht auf das-

---

*) Der Kürze wegen will ich, uneigentlich, Empfindung jene Modification des Nervs nennen, die in dem lebenden Thiere eine Empfindung zu verursachen vermag.

**) Wohl verstanden, daſs hier nur von jenen Nerven die Rede ist, die Bewegungen und Gemeinempfindungen hervorzubringen dienen.

selbe hinausgeht, wenn die Identität des electrischen und des Nervenfluidums, die schon von mehreren Naturforschern vermuthet wurde, als wahr erprobt wird, so scheinen gegenwärtige Versuche uns den Weg anzuzeigen, auf dem wir zur klaren Einsicht in dieselbe werden gelangen können.

Aber die Schlüsse, welche ich ohne Bedenken blofs aus der genauen Untersuchung der Erschütterung ableiten zu dürfen glaube, welche die Thiere im Momente erleiden, wo sie aufhören den Verbindungsbogen zwischen den Polen eines Electromotors zu bilden, sind folgende:

1. Dafs die Grundsätze, auf denen bisher die Theorie der *Volta'*schen Apparate gestützt ist, uns nicht berechtigen, in ihnen, in dem Momente, wo die electrische Circulation gehemmt ist, ein Rückströmen der Electricität anzunehmen.
2. Dafs, wenn sogar ein solches Rückströmen Statt fände, die Erschütterung des Thieres im gedachten Momente nicht von seinem Einwirken herrührt.
3. Dafs die zwei Arten der von der Electricität in den Muskeln hervorgebrachten Zuckungen, nämlich die idiopathischen und die sympathischen, von einander unterschieden zu werden verdienen, weil die ersten eintreten, in was immer für einer Richtung der electrische Strom die Nerven durchdringt, und die zweiten nur, wenn sie der Strom in der Richtung ihrer Verästung durchstreicht.
4. Dafs die Erschütterung, welche die Thiere erleiden, wenn sie plötzlich aufhören den Verbindungsbogen zwischen den Polen eines Electromotors zu bilden, davon abhänge, dafs wenn die Electricität die Nerven in einer ihrer Verästung entgegengesetzten Richtung durchströmt, nicht wie sonst beim

Schliefsen der Kette, sondern beim Öffnen derselben eine Erschütterung eintritt.

5. Dafs wenn die Electricität in einer ihrem Gange entgegengesetzten Richtung in die Nerven tritt, sie nicht eine Zuckung, sondern eine Empfindung verursacht.
6. Dafs eine solche Empfindung auch dann Statt findet, wenn ein die Nerven in der Richtung ihres Ganges durchdringender Strom aufgehoben wird *).

*) Diese Denkschrift wurde in Briefform im Verlaufe des Jahres 1827 der k. k. Academie zu Roveredo überreicht, von welcher auch ein Auszug in den Anhang (über vaterländische Geschichte und Litteratur) des Tiroler Boten eingerückt wurde. In diesen Auszug waren auch die hier aufgezählten Schlufssätze aufgenommen.

IV.

Übersicht der meteorologischen Beobachtungen in Wien im Jahre 1828.

(Stand des Barometers 19.946 Wiener Klafter über dem mittleren Spiegel der Donau.)

Barometerstand in P. Zoll bei 0° R. in jedem Monate.

1828.	Mittlerer.	Höchster.	Tiefster.	Mittlere monatliche Variation.
Jänner . . .	27.737	28.322	27.122	0.200
Februar . . .	27.550	27.939	27.100	0.839
März	27.440	27.864	26.966	0.898
April	27.469	28.006	26.989	1.011
Mai	27.509	27.793	27.253	0.540
Juni	27.597	27.765	27.282	0.483
Juli	27.444	27.621	27.148	0.473
August . . .	27.501	27.747	27.046	0.701
September . .	27.641	27.914	27.375	0.539
October . . .	27.723	28.100	27.321	0.679
November . .	27.704	28.128	27.420	0.708
December . .	27.757	28.215	27.345	0.870
Jährl. Durchschn.	27.589	28.322	26.966	1.356

Mittlerer Barometerstand nach den verschiedenen Beobachtungsstunden.

1828.	Um 8 Uhr früh.	Um 3 Uhr Nachmittags.	Um 10 Uhr Abends.
Jänner	27.734	27.729	27.749
Februar	27.554	27.534	27.548
März	27.446	27.432	27.440
April	27.528	27.502	27.511
Mai	27.531	27.494	27.471
Juni	27.616	27.583	27.593
Juli	27.461	27.425	27.448
August	27.520	27.495	27.512
September . . .	27.648	27.629	27.647
October	27.729	27.684	27.736
November . . .	27.700	27.700	27.683
December	27.756	27.748	27.768
Jährl. Durchschnitt	27.602	27.580	27.592

Barometerstand bei verschiedenen Winden.

Windesrichtung.	Barometerstand.	Anzahl der Beobachtungen, aus denen das Mittel entsprang.
S.	27.601	93
SSO.	27.556	6
SO.	27.643	156
OSO.	27.535	28
O.	27.563	21
ONO.	27.551	1
NO.	27.591	23
NNO.	27.520	6
N.	27.736	60
NNW.	27.684	30
NW.	27.675	177
WNW.	27.572	249
W.	27.578	160
WSW.	27.562	24
SW.	27.544	46
SSW.	27.626	78

Berechnet man hieraus nach der *Lambert*'schen Formel die mittlere Windesrichtung, so erhält man sie durch den Winkel φ, welchen sie mit dem Meridian macht, indem man $S = 0^\circ$, $W = 90^\circ$, $N = 180^\circ$, $O = 270^\circ$ setzt. Es ist nämlich

$$\varphi = 123^\circ \, {}^2/_3.$$

Temperatur der Luft nach Réaumur.

1828.	Mittlere.	Gröſste.	Kleinste.	Differenz zwischen d. gröſsten und kleinsten.
Jänner	—1°.01	8.3	—11.5	19.8
Februar . . .	—1°.59	8.0	—12.5	20.5
März	4°.73	13.0	— 5.0	18.0
April	9°.88	19.5	— 0.4	19.9
Mai	13°.15	21.2	6.8	14.4
Juni	15°.94	26.0	10.5	15.5
Juli	17°.77	27.0	11.5	15.5
August	15°.11	22.0	11.0	11.0
September . .	12°.43	20.5	5.8	14.7
October . . .	7°.29	18.2	— 2.0	20.2
November . .	4°.14	11.0	— 3.0	14.0
December . .	1°.87	9.0	— 9.0	18.0
Jährl. Durchschn.	8°.31	27.0	—12.5	39.5

Beschaffenheit der Atmosphäre.

1 8 2 8.	Heitere Tage	Wolken mit Sonnenschein.	Trüb.	Nebel.	Regen.	Schnee.	Gewitter.	Herrschender Wind.
Jänner . .	2	15	14	7	9	5	2	SO. und NW.
Februar . .	2	13	14	9	7	10	—	SO. und NW
März . . .	1	13	17	2	17	4	—	WNW.
April . . .	2	27	1	1	8	3	1	WNW.
Mai . . .	4	26	1	—	10	—	2	WNW. u. SO.
Juni . . .	1	27	2	—	14	—	6	WNW.
Juli . . .	3	26	2	—	11	—	5	WNW.
August . .	1	24	6	1	16	—	1	WNW. u. W.
September .	1	24	5	4	13	—	1	WNW.
October . .	3	16	12	11	7	1	1	NW. u. SO.
November .	—	14	16	13	7	—	—	WNW. u. SO.
December .	—	17	14	9	5	2	—	NW.
Jährl. Durchschnitt .	20	242	104	57	124	25	19	WNW. u. NW.

V.

Fortschritte der Physik in der neuesten Zeit.

Meteorologie.

1. Über das Gesetz der stündlichen Änderungen des Luftdruckes. Von *Carlini.*

(Memorie della soc. ital. delle sc. Tom. X)

Gegenwärtige Abhandlung hat zum Zweck, das Gesetz zu entwickeln, nach welchem die stündlichen regelmäfsigen Veränderungen des Luftdruckes erfolgen, und das, was dabei auf Rechnung der anziehenden Kraft der Sonne kommt, von dem zu sondern, was dieser Himmelskörper durch seine erwärmende Kraft bewirkt. Dafs

die beobachteten regelmäſsigen Schwankungen des Barometerstandes durch diese zwei Ursachen hauptsächlich bestimmt werden, ist keinem Zweifel unterworfen, so wie es klar ist, daſs durch jede derselben eine besondere atmosphärische Ebbe und Fluth erzeugt wird; allein es fallen die Ebben und Fluthen, die von beiden Wirkungen herrühren, nicht mit einander zusammen. Durch die erwärmende Kraft der Sonne wird eine Fluth hervorgebracht, die in 24 Stunden wiederkehrt, und die *Carlini* die *dynamische* nennt, während durch ihre anziehende Kraft eine Fluth erzeugt wird, die in 24 Stunden zwei Mal eintritt, und daher eine Periode von 12 Stunden hat.

Carlini hatte sich eine Reihe von guten in gleichen Zeitabschnitten beobachteten Barometerbeobachtungen verschafft. Er selbst hat am 28. Mai zu beobachten angefangen, und dieses bis zum 29. Juni Tag und Nacht von vier zu vier Stunden fortgesetzt, mit einer bloſsen Unterbrechung von drei Tagen. Nach einer vorläufigen Prüfung der Beobachtungsresultate hielt er es für sicherer, diese Beobachtungen in kürzeren Zeitabschnitten, etwa nach je zwei Stunden, auf einander folgen zu lassen. Er begann daher von neuem zu beobachten, und setzte seine Bemühung bis zur Hälfte des Juli fort. Um aber doch auch die ersteren Beobachtungen brauchen zu können, suchte er den Barometerstand, welcher mitten zwischen zwei Beobachtungszeiten Statt fand, durch folgendes Verfahren: Er suchte aus den Barometerhöhen, welche bei den nach je zwei Stunden angestellten Beobachtungen um 0 Uhr Statt hatten, das Mittel, und that dasselbe für alle Barometerhöhen, die um 4, 8, 12, 16, 20 U. beobachtet wurden; hierauf fand er eben so das Mittel für jede Beobachtungsstunde aus jenen Barometerhöhen, die um 2, 6, 10, 14, 18, 22 U. angestellt

wurden, und suchte dann die Differenz zwischen der halben Summe zweier zunächst auf einander folgenden Barometerhöhen der ersten Art und der mittleren Barometerhöhe der Zwischenstunde. Diese stets sehr kleine Gröſse diente als Correction für das Mittel, welches aus je zwei der nach vier Stunden auf einander folgenden Beobachtungen berechnet worden war, und gab dadurch nahe genug den um 2, 6, 8, 14, 18 etc. Uhr Statt habenden Luftdruck. Daſs diese Correction erst angebracht wurde, nachdem der Barometerstand auf den Eispunct reducirt war, versteht sich von selbst. Doch scheint es, als habe *Carlini* nicht jede einzelne Barometerhöhe nach der dabei beobachteten Quecksilbertemperatur, sondern, was minder gut war, den mittleren Barometerstand nach dem mittleren Wärmegrad corrigirt. Da es sich bei diesen Beobachtungen nicht um die absolute Barometerhöhe, sondern nur um die kleinen Variationen der Höhe handelte, so wurde der Schwimmer des hierbei gebrauchten Gefäſsbarometers nicht regulirt, um den dabei leicht zu begehenden Fehler zu vermeiden, sondern es wurde die jeder Zeit mittelst einer Loupe abgelesene Barometerhöhe erst nach der Hand durch Rechnung auf ein beständiges Niveau des Quecksilbers im Gefäſse gebracht. *Carlini* gibt in seiner Denkschrift diese Correctionsmethode vollständig an. Wir übergehen sie, und lassen gleich die Resultate der Beobachtungen folgen. Dabei bedeutet t die wahre Beobachtungszeit, p'' den beobachteten Barometerstand, t den Stand des mit dem Barometer verbundenen Thermometers, b den corrigirten Barometerstand, d die halbe Summe zweier zunächst auf einander folgenden Barometerhöhen, und D die Differenz zwischen d und der den Stunden 2, 6, 8, 12 etc. entsprechenden Barometerhöhen.

t	p″	t	b	d	D
0	334.580 P. L.	21°.28	332.8547		
2	334.438 »	21°.57	332.6898	332.6752	+ 0.0147
4	334.270 »	21°.91	332.4957		
6	334.188 »	21°.65	332.4346	332.5347	— 0.1001
8	334.278 »	21°.04	332.5738		
10	334.335 »	19°.96	332.7173	332.7097	+ 0.0076
12	334.416 »	19°.37	332.8457		
14	334.366 »	18°.85	332.8379	332.8401	— 0.0022
16	334.340 »	18°.57	332.8346		
18	334.384 «	18°.65	332.8716	332.9091	— 0.0375
20	334.565 »	19°.50	332.8936		
22	334.635 »	21°.21	332.9154	332.9191	— 0.0037

Die mittleren Barometerhöhen in den von vier zu vier Stunden gemachten Beobachtungen vom 28. Mai bis 19. Juli waren:

t	p″	t	b
0	334.4008	19.282	332.8375
4	334.1088	19.496	332.5296
8	334.1566	18.882	332.5502
12	334.2998	17.930	332.8461
16	334.1984	17.154	332.8078
20	334.4090	17.936	332.9544

Nimmt man aus zwei auf einander folgenden Beobachtungen die halbe Summe, und setzt die der gleichen Stunde entsprechenden Werthe von D dazu, so erhält man die interpolirten Barometerhöhen, wie folget:

t	Halbe Summe.	D	b
2	332.6835	+ 0.0147	332.6982
6	332.5399	— 0.1001	332.4398
10	332.6981	+ 0.0076	332.7057
14	332.8296	— 0.0022	332.8247
18	332.8811	— 0.0375	332.8436
22	332.8960	— 0.0037	332.8923

Bevor aus diesen Beobachtungen ein Ausdruck für die periodischen Variationen des Luftdruckes abgeleitet werden konnte, überzeugte sich *Carlini* davon, daſs ihre Anzahl groſs genug sey, um die zufälligen Veränderungen des Barometerstandes unschädlich zu machen. Dieses konnte man aber keineswegs aus den Differenzen von verschiedenen Ordnungen abnehmen, weil es sich hier um eine Function handelt, welche aus einer Reihe von Sinussen besteht, die stufenweise um 30° oder 60° wachsen. Dahin führt eine Reihe, die *Lagrange* in den Berliner Ephemeriden für das Jahr 1763 entwickelt, und deren allgemeines Glied folgendes ist:

$$A_n = a \sin.(\alpha + n\varphi) + b \sin.(\beta + n\delta) + c \sin.(\gamma + n\psi) + \ldots$$

Man gebe der Gröſse n successive die Werthe -3, -2, -1, 0, $+1$, $+2$ etc., und setze voraus, es seyen die Werthe von A_{-3}, A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2 etc. bekannt. Besteht nun der Werth von A_n nur aus dem einen Gliede $a \sin.(\alpha + n\varphi)$, so hat man:

$$A_{-3} = a \sin.(\alpha - 3\varphi),$$
$$A_{-2} = a \sin.(\alpha - 2\varphi),$$
$$A_{-1} = a \sin.(a - \varphi),$$
$$A_0 = a \sin.\alpha,$$
$$A_1 = a \sin.(\alpha + 1\varphi),$$
$$A_2 = a \sin.(\alpha + 2\varphi),$$
$$A_3 = a \sin.(\alpha + 3\varphi).$$

Stellen nun B_{-3}, B_{-2}, . . . B_1, B_2 etc. die successiven Differenzen zwischen A_{-3}, A_{-2}, A_{-1} etc. vor, so ist

$$B_{-3} = 2a \sin.\tfrac{1}{2}\varphi \cos.(\alpha - \tfrac{5}{2}\varphi),$$
$$B_{-2} = 2a \sin.\tfrac{1}{2}\varphi \cos.(\alpha - \tfrac{3}{2}\varphi),$$
$$B_{-1} = 2a \sin.\tfrac{1}{2}\varphi \cos.(\alpha - \tfrac{1}{2}\varphi),$$

$$B_1 = 2a \sin.\tfrac{1}{2}\varphi \cos.(\alpha + \tfrac{1}{2}\varphi),$$
$$B_2 = 2a \sin.\tfrac{1}{2}\varphi \cos.(\alpha + \tfrac{3}{2}\varphi),$$
$$B_3 = 2a \sin.\tfrac{1}{2}\varphi \cos.(\alpha + \tfrac{5}{2}\varphi).$$

Werden eben so die zweiten Differenzen mit C_{-2}, C_{-1} etc., die dritten mit D_{-2}, D_{-1} etc. bezeichnet, so erhält man:

$$C_0 = -4a \sin.^2 \tfrac{1}{2}\varphi \sin.\alpha,$$
$$C_{-2} = -4a \sin.^2 \tfrac{1}{2}\varphi \sin.(\alpha - 2\varphi),$$
$$C_{-1} = -4a \sin.^2 \tfrac{1}{2}\varphi \sin.(\alpha - \varphi),$$
$$C_1 = -4a \sin.^2 \tfrac{1}{2}\varphi \sin.(\alpha + \varphi),$$
$$C_2 = -4a \sin.^2 \tfrac{1}{2}\varphi \sin.(\alpha + 2\varphi),$$
etc. etc.
$$D_{-2} = -8a \sin.^3 \tfrac{1}{2}\varphi \cos.(\alpha - \tfrac{3}{2}\varphi),$$
$$D_{-1} = -8a \sin.^3 \tfrac{1}{2}\varphi \cos.(\alpha - \tfrac{1}{2}\varphi),$$
$$D_1 = -8a \sin.^3 \tfrac{1}{2}\varphi \cos.(\alpha + \tfrac{1}{2}\varphi),$$
$$D_2 = -8a \sin.^3 \tfrac{1}{2}\varphi \cos.(\alpha + \tfrac{3}{2}\varphi),$$
etc. etc.

Man setze nun in der Reihe der Differenzen von ungerader Ordnung

$$B_0 = \tfrac{1}{2}(B_{-1} + B_1), \quad D_0 = \tfrac{1}{2}(D_{-1} + D_1), \quad \text{etc.}$$

und man erhält folgende regelmäſsig fortschreitende Werthe:

$$A_0 = a \sin.\alpha = 2^0 a \sin.\alpha \sin.^0 \tfrac{1}{2}\varphi,$$
$$B_0 = 2a \cos.\alpha \sin.\tfrac{1}{2}\varphi \cos.\tfrac{1}{2}\varphi = 2^0 a \cos.\alpha \sin.^0 \tfrac{1}{2}\varphi \sin.\varphi,$$
$$C_0 = -4a \sin.\alpha \sin.^2 \tfrac{1}{2}\varphi = -2^2 a \sin.\alpha \sin.^2 \tfrac{1}{2}\varphi,$$
$$D_0 = -8a \cos.\alpha \sin.^3 \tfrac{1}{2}\varphi \cos.\tfrac{1}{2}\varphi = -2^2 a \cos.\alpha \sin.^2 \tfrac{1}{2}\varphi \sin.\varphi,$$
$$E_0 = 16a \sin.\alpha \sin.^4 \tfrac{1}{2}\varphi = 2^4 a \sin.\alpha \sin.^4 \tfrac{1}{2}\varphi,$$
$$F_0 = 32a \cos.\alpha \sin.^5 \tfrac{1}{2}\varphi \cos.\tfrac{1}{2}\varphi = 2^4 a \cos.\alpha \sin.^4 \tfrac{1}{2}\varphi \sin.\varphi,$$
etc. etc.

Es ist leicht einzusehen, daſs, wenn man im obigen Ausdrucke von A_n mehrere Glieder, wie

$$a \sin.(\alpha + n\varphi) + b \sin.(\beta + n\delta) \text{ etc.}$$

beibehält, die Reihen A_0, C_0, E_0 etc., B_0, D_0 eben so viele geometrische Progressionen enthalten, und daher eine recurrirende Reihe vorstellen. Aber solche Reihen haben die Eigenschaft, dafs

$$\frac{C_0}{A_0}, \; \frac{E_0}{C_0} \text{ etc.}, \; \frac{D_0}{B_0}, \frac{F_0}{D_0} \text{ etc.}$$

sich einem beständigen Werthe nähern, und dieser Werth ist für beide Reihen $-2^2 \sin.^2 \frac{1}{2}\varphi$, in der Voraussetzung, dafs der Coefficient a von $\sin.(\alpha + n\varphi)$ unter allen Coefficienten des Werthes von A_n der gröfste ist. Umgekehrt wird man schliefsen können, dafs sich der Werth von A_n durch eine Function von der Form

$$A_n = a \sin.(\alpha + n\varphi) + b \sin.(\beta + n\delta) \text{ etc.}$$

darstellen läfst, sobald A_n in Zahlen ausgedrückt von der Art ist, dafs die successiven Differenzen der vorhin angezeigten Ordnung in der Form

$$\frac{C_0}{A_0}, \; \frac{E_0}{C_0} \text{ etc.}, \; \frac{D_0}{B_0}, \; \frac{F_0}{D_0} \text{ etc.}$$

sich einem constanten Werthe nähern.

Um dieses Criterium auf obige Werthe von b anzuwenden, ziehe man von jedem Gliede das arithmetische Mittel aus allen ab, und setze für Mitternacht (12 U.) $n = 0$, für 14 U. $n = 1$, für 16 U. $n = 2$ etc., für 10 U. $n = -1$ etc., und man erhält

$$A_0 = 0.1019, \quad C_0 = -0.1618, \quad E_0 = 0.3130,$$
$$B_0 = 0.0595, \quad D_1 = 0.0098, \quad F_0 = -0.0158,$$
$$G_0 = -0.8306, \quad I_0 = 2.7654,$$
$$H_0 = 0.0288, \quad K_0 = 0.1657,$$

und hieraus

$$\frac{A_0}{C_0} = -1.6, \; \frac{E_0}{C_0} = -1.9, \; \frac{G_0}{E_0} = -2.7, \; \frac{I_0}{G_0} = 3.3,$$

Die Werthe $\frac{D_0}{B_0}$ etc. sind so klein, dafs sich dar-

aus weder zu Gunsten noch zum Nachtheil unserer Hypothese etwas ableiten läſst. Die Regelmäſsigkeit der ersteren Werthe spricht offenbar für die hinreichende Anzahl der Barometerbeobachtungen.

Man kann demnach annehmen, daſs jene beobachteten Werthe mit Hülfe einer constanten Gröſse und eines veränderlichen Antheils von der Formel

$$a \sin.(\alpha + n\varphi) + b(\sin.\beta + n\delta) \text{ etc.}$$

dargestellt werden. Man setze nun dem Vorhergehenden gemäſs voraus, es drücke das erste Glied dieser veränderlichen Gröſse die dynamische, das zweite die physische Fluth der Atmosphäre aus, und bezeichne den Barometerstand, welcher der wahren astronomischen Zeit H entspricht, mit b; so ist

$$b = x + a \sin.(\alpha + 15^\circ H) + b \sin.(\beta + 30^\circ H);$$

oder, was zur weiteren Ausführung der Rechnung bequemer ist,

$$b = x + y \sin. h + y' \cos. h + z \sin. 2h + z' \cos. 2h,$$

wobei $h = 15^\circ H$ ist. Setzt man nun successive für h die Werthe 0, 2, 4 . . . 22, und bezeichnet die entsprechenden Resultate von b mit b°, b', b'' etc., so erhält man zwölf Gleichungen von der Form

$$b^\circ = x + y \sin.\ 0^\circ + y' \cos.\ 0^\circ + z \sin.\ 0^\circ + z' \cos.\ 0^\circ,$$
$$b' = x + y \sin. 30^\circ + y' \cos. 30^\circ + z \sin. 60^\circ + z' \cos. 60^\circ,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$b'' = x + y \sin. 330 + y' \cos. 330 + z \sin. 300 + z' \cos. 300.$$

Weil man mehrere Gleichungen hat, als Unbekannte zu bestimmen sind, so kann man sich zur Ausmittelung der letzteren der Methode der kleinsten Quadratsumme bedienen. Nach dieser Methode erhält man

$$x = 332.7442, \quad y = -0.1919, \quad y' = 0.0177,$$
$$z = -0.0350, \quad z' = 0.0900,$$

und mithin

$$b = 332.7442 - 0.1919 \sin. h + 0.0177 \cos. h$$
$$- 0.0350 \sin. 2h + 0.0900 \cos. 2h.$$

Setzt man nun für h successive die Werthe 0°, 30°, 60° etc., so bekommt man die berechneten Werthe der folgenden Tafel, die, wie die beigesetzten beobachteten Werthe zeigen, nur sehr wenig von letzteren entfernt sind.

h	b berechnet.	b beobachtet.	Differenz.
0°	332.8519	332.8375	— 0.0144
30°	332.6782	332.6982	+ 0.0200
60°	332.5115	332.5296	+ 0.0181
90°	332.4623	332.4398	— 0.0225
120°	332.5545	332.5502	— 0.0043
150°	332.7082	332.7057	— 0.0025
180°	332.8165	332.8461	+ 0.0296
210°	332.8396	332.8247	— 0.0149
240°	332.8263	332.8078	— 0.0185
270°	332.8461	332.8436	— 0.0025
300°	332.9045	332.9544	+ 0.0499
330°	332.9308	332.8923	— 0.0385

Obige Formel läſst sich auch compendiöser darstellen, indem man die Sinusse und Cosinusse desselben Winkels in einen Ausdruck zusammenfassen kann. Man erhält nämlich den Werth

$$b = 332.7442 + 0.1927 \sin. (174° \, 44' + h)$$
$$+ 0.0965 \sin. (111° \, 15' + 2h);$$

oder, wenn man die Coefficienten zum Behufe der Correction des Quecksilberstandes im Gefäſse des Barometers mit $\frac{36}{35}$ multiplicirt:

$$b = 332.7442 + 0.1982 \sin. (174° \, 44' + h)$$
$$+ 0.0993 \sin. (111° \, 15' + 2h).$$

Um die Maxima und Minima zu finden, differenzire man diese Gleichung, und setze ihr Differenziale = 0.

Auf diese Weise wird

$$0.1982 \cos.(174^\circ\, 44' + h) + 0.1986 \cos.(111^\circ\, 15' + 2h) = 0.$$

Diese Gleichung läſst sich aber nicht direct auflösen, man kann sie aber auflöslich machen, wenn man die Coefficienten der zwei Cosinusse einander gleich setzt. Dadurch wird nämlich

$$\cos.(174^\circ\, 44' + h) = -\cos.(111^\circ\, 15' + 2h)$$
$$= \cos.(291^\circ\, 15' + 2h),$$

und man erhält eine der gesuchten Wurzeln, wenn man setzt

$$174^\circ\, 44' + h = 291^\circ\, 15' + 2h \quad \text{oder} \quad h = 243^\circ\, 29',$$

und die anderen, indem man setzt:

$$274^\circ\, 44' + h = 360^\circ - 291^\circ\, 15' + 2h,$$
$$174^\circ\, 44' + h = 2.360 - 291^\circ\, 15' + 2h,$$
$$174^\circ\, 44' + h = 3.360 - 291^\circ\, 15' + 2h,$$

woraus man erhält

$$h = 324^\circ\, 40', \quad h = 84^\circ\, 40', \quad h = 204^\circ\, 40'.$$

Um nun die Correction zu finden für den durch obige Gleichsetzung der zwei Coefficienten begangenen Fehler, sey h' ein genäherter Werth von h und $h = h' + \delta$, und es sey einer der Coefficienten im Werth von b gleich $p - \omega$, der andere $p + \omega$, mithin p der Mittelwerth beider, und ω eine sehr kleine Gröſse; man setze ferner $174^\circ\, 44' = m$, $291^\circ\, 15' = n$, so hat man die Gleichung

$$(p - \omega) \cos.(m + h' + \delta) = (p + \omega) \cos.(n + 2h' + 2\delta);$$

und wenn man dieses entwickelt, und die Gröſsen der zweiten Ordnung in Bezug auf ω und δ vernachläſsiget, so wird

$$p\,\delta \cos.(m + h') - \omega \cos.(m + h') - p\,\delta \sin.(m + h') =$$
$$= p \cos.(n + 2h') + \omega \cos.(n + 2h') - 2p\,\delta \sin.(n + 2h')$$

oder

$$\delta = \frac{\omega}{p} \cdot \frac{\cos.(n + 2h') + \cos.(m + h')}{2\sin.(n + 2h') - \sin.(m + h')}$$

$$= \frac{2\omega}{p} \cdot \frac{\cos.(m + h')}{2\sin.(n + 2h') - \sin.(m + h')}.$$

Setzt man nun für h' die vorhin gefundenen Werthe 84° 40′; 204° 40′; 243° 29′; 324° 40′; so wird nach der Ordnung $\delta = -0.00009 = -0'.4$; $\delta = -0.00147 = -6$; $\delta = 0.00096 = 4$ und $\delta = 0.00060 = -3$, und daher ergeben sich die Werthe von h wie folgt:

$h = 84° 40'$; $h = 204° 34'$; $h = 243° 33'$; $h = 324° 43'$; und daher die wahre Sonnenzeit, zu welcher die Maxima und Minima Statt finden für den Sommer:

Stund. des Max.	Stunden des Min.	Gröſste und kleinste Höhe.		Schwankung.	
13ʰ 38′	5ʰ 39′	332.8431	332.4517	— 0.0147	— 0.4861
21ʰ 39′	16ʰ 14′	332.9378	332.8284	0.3914	0.1094

Die Stunden 5 ½, 1 ½ nach Mitternacht, 4 und 9 ½ U. früh wären demnach in Mailand die günstigsten Beobachtungsstunden für das Barometer, wenn man nur darauf ausginge, den Werth jener Maxima und Minima zu bestimmen, hingegen die ungünstigsten, wenn man die Stunden dieser Maxima und Minima erfahren wollte. Wer daher sowohl das eine als das andere zu bestimmen wünschte, der müſste entweder täglich acht Mal beobachten, nämlich zu der Zeit, wo die Ungleichheiten successiv den gröſsten positiven und negativen Werth haben, oder überhaupt öfters nach gleichen Zwischenzeiten. Aus dem Vorhergehenden sieht man zugleich, daſs man den mittleren Luftdruck nicht durch das arithmetische Mittel aus dem gröſsten und kleinsten Werthe erhält. Nach obigen Beobachtungen ist das vormittägige

Max. 332.9378, das nachmittägige Min. 332.4517, mithin das Mittel aus beiden 332.6947, während das wahre 332.7442 beträgt. Dazu kommt noch, daſs man, um das Maximum und Minimum zu erhalten, bei jeder Jahreszeit zu einer anderen Stunde beobachten muſs, weil die Zeit das Maximum und Minimum mit der Jahreszeit ändert. Die vorhin angegebenen Perioden beziehen sich auf die Sommermonate; um sie für den Winter zu bestimmen, stellte *Carlini* zur Zeit des Wintersolstitiums (vom 1. December 1826 bis 20. Jänner 1827) 40tägige Beobachtungen an, und zwar auf solche Weise, daſs in den ersten und dritten zehn Tagen um 0, 4, 8, 12, 16, 20 Uhr von Mitternacht an, in den zweiten und vierten hingegen um 0, 2, 6, 10, 14, 18, 22 Uhr beobachtet wurde. Die Mittelwerthe des Luftdruckes zu verschiedenen Stunden waren folgende:

Iste und IIIte Decade.		IIte und IVte Decade.	
Stunde.	Barometerstand bei 0° R.	Stunde.	Barometerstand bei 0° R.
0	332.4526	0	331.3332
4	332.3231	2	331.0812
8	332.3892	6	331.0344
12	332.3629	10	331.0933
16	332.3317	14	331.0150
20	332.5483	18	331.0252
		22	331.3852

Die Resultate dieser Beobachtungen sind nicht unmittelbar mit einander vergleichbar, weil sie eine Gröſse enthalten, welche von den unregelmäſsigen Schwankungen der Atmosphäre abhängt. Um diese zu finden, sucht *Carlini* aus den von vier zu vier Stunden angestellten Beobachtungen das arithmetische Mittel, in welchem alle Ungleichheiten durch Sinusse und Cosinusse der Bogen, die aliquote Theile der ganzen Peripherie sind,

ausgedrückt werden können. Heiſst man β_0, β_2, β_4 etc. die Barometerhöhen der ersten Beobachtungsreihe, β_1 β_3, β_5 etc. die der zweiten, so ist

$$\tfrac{1}{6}(\beta_0 + \beta_2 + \beta_4 + \beta_6 + \beta_8 + \beta_{10}) = 332.4013,$$
$$\tfrac{1}{6}(\beta_1 + \beta_3 + \beta_5 + \beta_7 + \beta_9 + \beta_{11}) = 331.0891,$$

und daher die halbe Differenz beider Mittel $= 0.6561$, welche zu den Beobachtungen der ersten Reihe addirt, und von denen der zweiten Reihe abgezogen, die Werthe von b gibt. Weil man auf diese Weise für b_0 zwei Werthe erhält, so kann man das Mittel beider als wahren Werth ansehen. Es wird für

$H = 0^h$ $b_0 = 331.8929$,		$H = 12^h$ $b_6 = 331.7068$,
2^h $b_1 = 331.7373$,		14^h $b_7 = 331.6711$,
4^h $b_2 = 331.6670$,		16^h $b_8 = 331.6756$,
6^h $b_3 = 331.6905$,		18^h $b_9 = 331.6813$,
8^h $b_4 = 331.7331$,		20^h $b_{10} = 331.8911$,
10^h $b_5 = 331.7494$,		22^h $b_{11} = 331.9413$.

Verfährt man nun wieder wie vorhin nach der Methode der kleinsten Quadratsumme, so erhält man:

$$b = 331.7532 - 0.0331 \sin. h + 0.0557 \cos. h$$
$$- 0.0471 \sin. 2h + 0.0489 \cos. 2h,$$

woraus sich folgende Werthe ergeben:

h	b berechnet.	b beobachtet.	Differenz.
0°	331.8578	331.8929	+ 0.0351
30°	331.7686	331.7373	— 0.0313
60°	331.6871	331.6670	— 0.0201
90°	331.6712	331.6905	+ 0.0193
120°	331.7129	331.7331	+ 0.0202
150°	331.7536	331.7494	— 0.0042
180°	331.7464	331.7069	— 0.0395
210°	331.7050	331.6711	— 0.0341
240°	331.6887	331.6756	— 0.0131
270°	331.7374	381.6813	— 0.0561
300°	331.8261	331.8922	+ 0.0661
330°	331.8834	331.9413	+ 0.0579

Obige Formel, bloſs durch Sinusse ausgedrückt, und die Coefficienten mit $\frac{36}{35}$ zur Correction des Niveau des Quecksilbers im Gefäſse des Barometers reducirt, gibt

$$b = 331.7532 + 0.0667 \sin.(120^\circ\, 44' + h) + 0.0698 \sin.(133^\circ\, 54' + 2h),$$

aus welcher man zur Bestimmung des Maximum und Minimum erhält:

$$0.0667 \cos.(120^\circ\, 44' + h) + 0.1396 \cos.(133^\circ\, 54' + h) = 0.$$

Durch bloſses Versuchen erhält man die Näherungswerthe

$$h = 80^\circ,\quad h = 160^\circ,\quad h = 235^\circ,\quad h = 335^\circ,$$

oder mit dem fehlenden Theil

$$h = 81^\circ\, 10',\quad 160^\circ\, 47',\quad 233^\circ\, 51',\quad 336^\circ\, 21';$$

mithin erhält man folgende Stunden des Maximum und Minimum:

Stunde des Maximum.	Barometerstand	Stunde des Minimum.	Barometerstand
$10^h\, 43'$	331.7574	$5^h\, 25'$	331.6672
$22^h\, 25'$	331.8891	$15^h\, 35'$	331.6854

Es fällt demnach das Maximum und das Minimum im Winter in andere Stunden als im Sommer, auch die Excursionen des Barometers sind in beiden Jahreszeiten verschieden, und zwar ist die erste und letzte im Sommer viel gröſser als die dazwischen liegenden. Am besten übersieht man alles dieses durch graphische Darstellung sowohl der dynamischen als der physischen Fluth im Winter und Sommer. Es drückt nämlich der Ausdruck $19.92 \sin.(174^\circ\, 44' + h)$ die physische Fluth im Sommer, und der Ausdruck $16.67 \sin.(120^\circ\, 44' + h)$

dieselbe im Winter aus, und die punctirte Curve in Fig. 13 stellt erstere, dieselbe in Fig. 14 die letztere vor. Die dynamische Fluth gibt für den Sommer die Formel $9.93 \sin. (111^\circ\ 15' + 2h)$, und für den Winter die Formel $6.98 \sin. (133^\circ\ 54' + 2h)$ an. Diese Fluthen werden in Fig. 13 und 14 durch die mit kleinen Strichen bezeichnete Curve dargestellt. Die Summe der Ordinaten beider Fluthen gibt die totale beobachtete Fluth an, und die ganz ausgezogene Curve stellt diese vor. Schon der bloſse Anblick dieser Figuren zeigt, daſs die dynamische Fluth im Winter und Sommer fast denselben Gang nimmt. Aber die physische Fluth ist im Sommer fast drei Mal gröſser als im Winter, welches sich aus den im Sommer viel gröſseren Temperaturdifferenzen leicht erklären läſst.

Da die bisher besprochenen Phänomene sich nur auf Mailand beziehen, so blieb noch übrig zu sehen, wie sie sich in verschiedenen Breiten und selbst in derselben Breite bei verschiedener Beschaffenheit des Bodens verhalten. Dazu benützt *Carlini* zuerst die von *Chiminello* zu Padua angestellten Beobachtungen, nachdem er sie um $^1/_{160}$ L. corrigirt hatte. Sie sind folgende:

Stunde.	Barometerstand.	Stunde.	Barometerstand.
0	334.1062	12	333.9687
2	333.9687	14	333 9750
4	333 8125	16	333.9375
6	333.7250	18	334.0125
8	333.8250	20	334.1375
10	333.9500	22	334.1812

Aus diesen ergibt sich die Gleichung

$$b = 333.9666 + 0.1488 \sin. (151^\circ\ 31' + h) + 0.1039 \sin. (123^\circ\ 44' + 2h),$$

aus welcher folgende Werthe abgeleitet werden:

h	b berechnet.	b beobachtet.	Differenz.
0°	334.1240	334.1062	— 0.0178
30°	333.9559	333.9687	+ 0.0128
60°	333.7956	333.8125	+ 0.0169
90°	333.7494	333.7250	— 0.0244
120°	333.8246	333.8250	+ 0.0004
150°	333.9329	333.9500	+ 0.0171
180°	333.9820	333.9687	— 0.0133
210°	333.9637	333.8750	+ 0.0113
240°	333.9512	333.9375	— 0.0137
270°	334.0110	334.0125	+ 0.0015
300°	334.1222	334.1375	+ 0.0153
330°	334.1867	334.1812	— 0.0055

Um die Coefficienten der allgemeinen Gleichung für den Winter zu Padua zu finden, benutzt *Carlini* die vom 1. Jänner bis 6. Februar 1778, und die vom 10. October bis 22. December desselben Jahres von *Chiminello* angestellten Beobachtungen, die folgende Werthe von b geben:

Stunde.	Luftdruck.	Stunde.	Luftdruck.
0	337.1250	12	337.2312
2	336.8937	14	337.0000
4	336.9250	16	336.9375
6	337.0250	18	336.9187
8	337.1625	20	337.0125
10	337.2687	22	337.2125

Die Methode der kleinsten Quadratsumme führt hieraus zu der Gleichung

$$b = 337.0594 + 0.0641 \sin.(301^\circ\, 24' + h) + 0.1621 \sin.(143^\circ\, 57' + 2h),$$

aus der sich wieder folgende specielle Werthe ergeben:

h	b berechnet.	b beobachtet.	Differenz.
0°	337.1016	337.1250	+ 0.0234
30°	336 9646	336.8937	— 0.0709
60°	336.9000	336.9250	+ 0.0250
90°	336.9959	337.0250	+ 0.0291
120°	337.1798	337.1625	— 0.0173
150°	337.2844	337.2687	— 0.0157
180°	337.2110	337.2315	+ 0.0202
210°	337.0260	337.0000	— 0.0260
240°	336.8970	336.9375	+ 0.0405
270°	336.9291	336.9187	— 0.0104
300°	337.0671	337.0125	— 0.0546
330°	337.1562	337.2125	+ 0.0563

Differenzirt man die beiden vorhergehenden, auf Padua sich beziehenden Gleichungen, und setzt das Differenziale gleich Null, so findet man:

$$0.1488 \cos.(151^\circ 31' + h) + 0.2078 \cos.(123^\circ 44' + 2h) = 0,$$
$$0.0641 \cos.(301^\circ 24' + h) + 0.3242 \cos.(143^\circ 37' + 2h) = 0,$$

woraus sich folgende Werthe für die Zeit des Maximum und Minimum ergeben:

Stunden.	Barometerhöhe.	Excursion.		
5^h 38′	333.7475	+ 0.2346	Min.	Sommer.
12^h 13′	333.9811	— 0.0334	Max.	
17^h 31′	333.9487	+ 0.2384	Min.	
22^h 7′	334.1871	— 0.4396	Max.	
3^h 51′	336.8892	+ 0.3954	Min	Winter.
10^h 12′	337.2853	— 0.3964	Max.	
16^h 36′	336.8889	+ 0.2687	Min.	
22^h 15′	347.1576	— 0 2677	Max.	

Demnach wird auch durch diese Beobachtungen die Wahrheit bestätiget, daſs die stündlichen Schwankungen des Barometers aus zwei Theilen bestehen, deren einer vom einfachen, der andere vom doppelten Stun-

denwinkel abhängt, und daſs der Coefficient des ersteren im Sommer zwei bis drei Mal gröſser ist, als im Winter; ferner daſs sich der Coefficient des zweiten Theiles sehr wenig mit der Jahreszeit ändert, endlich daſs die Stunden der Minima und Maxima im Sommer nicht dieselben sind, wie im Winter, und daſs die zwei Minima im Winter eher eintreten, als im Sommer, während das Morgenmaximum im Winter etwas später kommt. Folgende Tafel stellt alles dieses noch klarer dar, bei welcher der beständige Theil von *b* weggelassen ist.

	Mailand.		Padua.	
	Sommer	Winter.	Sommer	Winter.
Physische Fluth. Coefficient	+0.1982	+0.0667	+0.1488	+0.0641
Const. des Arguments	174° 44′	120° 44′	151° 31′	301° 24′
Dynamische Fluth. Coefficient	+0.0993	+0.0698	+0.1039	+0.1621
Const. des Arguments	111° 15′	133° 54′	123° 44′	147° 17′
Minimum des Abendes	5^h 39′	5^h 25′	5^h 38′	3^h 51′
Excursion	+0.3914	+0.0902	+0.2346	+0.3954
Minimum der Nacht .	13^h 38′	10^h 43′	12^h 13′	10^h 12′
Excursion	+0.0147	+0.0720	+0.0334	+0 3964
Minimum des Morgens	16^h 14′	15^h 35′	17^h 31′	16^h 36′
Excursion	+0.1094	+0.2037	+0.2384	+0.2687
Maximum des Morgens	21^h 39′	22^h 25′	22^h 7′	22^h 15′
Excursion	+0.4861	+0.2209	+.04396	+0.2677

Der Coefficient der dynamischen Oscillation ist für Mailand etwas kleiner im Sommer, als im Winter, doch scheint diese Differenz bloſs von Beobachtungsfehlern abzuhängen. Aber für Padua ist diese Differenz bedeutend, und sogar der zu den Mailänder Beobachtungen gehörigen entgegengesetzt; die Constante des Argumentes der physischen Winterfluth für Padua differirt fast um 180° von der zu Mailand, welches nach *Carlini's* Meinung von einer mangelhaften Reduction der Barometerstände auf den Eispunct abhängt.

Es ist auch möglich, dafs die Elemente, von denen die atmosphärischen Oscillationen abhängen, in den einzelnen Jahren eben so variiren, wie die Temperatur, die Richtung der Winde etc. Um die verschiedenen Ursachen des so ungemein complicirten Phänomens einiger Mafsen zu sondern, wäre zu wünschen, dafs man die in verschiedenen Orten beobachteten Mittelwerthe mit einander vergleichen könnte. Dazu benützt *Carlini* mehrere an mehreren Orten Italiens im Jahre 1823 gleichzeitig angestellte Beobachtungen, welche durch eine an die meisten Astronomen Europas ergangene Einladung der Berliner Academie veranlafst wurden. Diese Beobachtungen mufsten vom 18. Jänner an bis zum 18. Juli von zwei zu zwei Stunden von 8 Uhr früh bis 10 Uhr Abends angestellt werden. In Oberitalien wurden diese Beobachtungen an sieben Plätzen, nämlich zu Mailand, Pavia. Turin, Padua, Modena, Bologna und Florenz, jedoch in ungleicher Anzahl, angestellt. Die folgende Tafel enthält die Mittelwerthe der Barometerstände auf 0° R. reducirt:

Stunden.	Mailand.	Pavia.	Turin.	Padua.	Modena.	Bologna.	Florenz.
20	331.906	333.146	325.890	335.079	334.647	332.725	334.777
22	331.885	333.039	325.753	335.035	334.592	332.804	334.741
0	331.760	332.963	325.603	335.000	334.458	332.688	334.263
2	331.632	332.781	325.528	334.952	334.238	332.503	334.413
4	331.560	332.516	325.244	334.846	334.068	332.359	334.282
6	331.516	332.491	325.466	334.736	334.039	332.349	334.268
8	331.632	332.611	325.685	334.899	334.383	332.489	334.507
10	331.778	332.880	325.839	334.992	334.336	332.605	334.836

Aus diesen Werthen erhält man mittelst der anfänglich entwickelten Formel durch die Methode der klein-

sten Quadratsumme folgende Gleichungen für die Barometerhöhe b.

Mailand:

$$b = 331.7812 + 0.2071 \sin. (136^\circ 56' + h) + 0.0544 \sin. (349^\circ 13' + 2h).$$

Pavia:

$$b = 332.9584 + 0.4001 \sin. (138^\circ 9' + h) + 0.1112 \sin. (306^\circ 36' + 2h).$$

Turin:

$$b = 332.7259 + 0.2811 \sin. (157^\circ 30' + h) + 0.0997 \sin. (20^\circ 50' + 2h).$$

Padua:

$$b = 335.0302 + 0.1992 \sin. (145^\circ 40' + h) + 0.0774 \sin. (296^\circ 44' + 2h).$$

Modena:

$$b = 334.3405 + 0.1701 \sin. (109^\circ 57' + h) + 0.1693 \sin. (40^\circ 59' + 2h).$$

Bologna:

$$b = 332.5908 + 0.1538 \sin. (112^\circ 35' + h) + 0.1169 \sin. (14^\circ 11' + 2h).$$

Florenz:

$$b = 334.7482 + 0.5326 \sin. (162^\circ 20' + h) + 0.0836 \sin. (274^\circ 19' + 2h).$$

Alle Glieder, welche der physischen Fluth angehören, zeigen eine hinreichende Gleichmäſsigkeit, indem die Coefficienten von sin. h durchaus negativ, die von cos. h durchaus positiv sind, mithin die Constanten des Argumentes durchaus im zweiten Quadranten, und zwar

zwischen 110° und 162° liegen. Die Glieder hingegen, welche zur dynamischen Fluth gehören, variiren sehr stark in der Gröſse und im Zeichen, müssen daher in der Folge noch näher studirt werden. Hier ist es genug, gezeigt zu haben, wie dieses scheinbar so variable Phänomen der Rechnung unterworfen werden kann.

Nun noch einige Bemerkungen über die unregelmäſsigen Barometerschwankungen. Gewöhnlich nimmt man an, daſs der Unterschied zwischen der gröſsten und kleinsten Barometerhöhe desto kleiner ist, je höher ein Ort liegt; hier aber, wo der Höhenunterschied der Stationen zwar sehr klein ist, zeigt es sich, daſs die gröſsten Excursionen des Barometers immer der kleineren Höhe entsprechen. Die folgende Tabelle gibt die Excursionen des Barometers an den beigesetzten Orten an, wie sie aus den vom 18. Juni bis 18. Juli 1823 angestellten Beobachtungen dadurch gefunden wurden, daſs nach Hinweglassung der kleinen, unterhalb 1/4 L. liegenden, den stündlichen Veränderungen angehörigen Variationen, die Summe der jedem Beobachtungsorte entsprechenden successiven gröſseren Differenzen durch die Anzahl dieser Veränderungen (12) getheilt wurde. Nebenbei stehen die mittleren Barometerhöhen:

Ort.	Mittlere Excursion des Barometers.	Mittlere Barometerhöhe.
Padua	2.39 L.	335.03 L.
Florenz	2.47 »	334 75 »
Mailand	2 83 »	331.74 »
Bologna	3.02 »	332.59 »
Modena	3.06 »	334 34 »
Pavia	3.13 »	332.96 »
Turin	3.16 »	325.73 »

Hier findet also am höchsten Orte (Turin) die gröſste Variation Statt.

Zur näheren Bestimmung des Ganges der gröſseren Barometerschwankungen in Betreff der Zeit ihres Eintrittes an verschiedenen Orten, hat *Carlini* den Augenblick angegeben, wo an jedem Orte ein Barometerstand Statt fand, welcher mitten zwischen dem Maximum und Minimum der vorhin angegebenen Excursion lag. Die folgende Tafel gibt an, um wie viel eher oder später dieses an jedem Beobachtungsorte Statt findet, als zu Mailand.

Pavia, .	früher $1^h . 9$,	Turin, .	später $0^h . 5$,
Padua, .	später $3^h . 4$,	Modena,	früher $0^h . 9$,
Bologna,	früher $0^h . 6$,	Florenz,	früher $2^h . 2$.

Gesetzt, es sey der Zeitunterschied in Vergleich mit Mailand ausgedrückt durch eine unbekannte Constante x, multiplicirt durch die Längendifferenz, mehr einer anderen unbekannten y, multiplicirt mit der Breitendifferenz, und man erhält:

$$0x - 17y = -1^h . 9, \qquad -6x - 24y = 0^h . 5,$$
$$11x - 4y = 3^h . 4, \qquad 7x - 49y = -0^h . 9,$$
$$8x - 58y = -0^h . 6, \qquad 8x - 102y = -2^h . 2,$$

woraus sich nach der Methode der kleinsten Quadrate ergibt:

$$334x - 1523y = 5.7, \qquad -1523y + 1706y = 310,$$

oder

$$x = 0.167 . \quad y = 0.033.$$

Es sey nun α die Länge, β die Breite von Mailand, $\alpha + p$, $\beta + q$ die Länge und Breite eines anderen Beobachtungsortes, δ die Zeit, wo der zu Mailand vorhin bezeichnete mittlere Barometerstand eintritt, $t + \delta$ die, wo an anderen Orten dasselbe Statt findet, so erhält man nahe:

$$t + \delta = t + \frac{p}{6} + \frac{q}{30},$$

wenn p in Zeitminuten, q in Gradminuten ausgedrückt ist, und erstere einen positiven Werth hat für Orte, die östlich von Mailand liegen, q hingegen für die, welche eine nördlichere Lage haben, t und δ aber in Stunden und ihren Decimaltheilen ausgedrückt sind. Da nun δ die nach dem Mailänder Meridian gezählte Zeit ist, so ist die nach dem Beobachtungsorte gezählte $\delta' = \delta - p$, und daher

$$\delta' = 9p + 2q.$$

Diese Formel lehrt im Allgemeinen, dafs sich die Barometerschwankungen von West nach Ost, und von Süd nach Nord fortpflanzen. Um die Lage der Linie zu finden, deren Richtung die Luftwelle beschreibt, mufs man p und q nach einerlei Einheit ausdrücken, wodurch man erhält $\delta' = 0.9$. Da ist nun $p' + 2q$ die Tangente des Winkels, unter welcher die genannte Linie gegen den Meridian geneigt ist. Der Winkel beträgt demnach 24°, und in der um 66° gegen den Meridian geneigten Linie müssen die Barometerschwankungen nahe gleichzeitig mit denen zu Mailand erfolgen; eine Linie, die nahe mit dem Zuge der Küsten des adriatischen Meeres zusammenfällt.

Man drücke nun durch $px + qy$ den mittleren Werth aus, um welchen die Schwankungen in Mailand früher oder später eintreten, als anderwärts. Substituirt man nun für p und q die der Lage der Beobachtungsorte entsprechenden Werthe, und setzt jeden dieser Ausdrücke der mittleren an diesem Orte beobachteten Excursion gleich, so erhält man endlich

$$334x + 1811x = 131.1,$$
$$1811x + 17010y = 593.9,$$

und hieraus

$$x = 0.4670,$$
$$y = -0.0137.$$

Demnach pflanzen sich die Oscillationen der Atmosphäre in der Richtung der Länge drei bis vier Mal schneller fort, als in der Richtung der Breite.

Carlini hat in derselben Denkschrift auch den täglichen Gang der Wärme und der Luftfeuchtigkeit nach demselben Principe untersucht, nach welchem er die regelmäſsigen Barometerschwankungen erörterte. Allein die Resultate der Rechnung stimmen nicht so genau mit der Erfahrung zusammen, wie die auf Luftschwankungen Bezug habenden, welche *Carlini* auf so geistreiche Weise zu behandeln wuſste.

2. Beobachtungen des Barometer- und Thermometerstandes zu Malmanger und Ullenswang in Norwegen, vom Jahre 1798 bis 1828. Von *Herzberg*.

(Edinb. journ. of sc. N. 18, p. 292.)

Im dritten Bande, S. 248 dieser Zeitschrift sind dem Leser die von *Herzberg* während 29 Jahren beobachteten höchsten und niedrigsten Barometerstände in Malmanger und Ullenswang mitgetheilt worden. Derselbe Beobachter macht in *Brewster's Journal of science* die Resultate seiner dreiſsigjährigen Beobachtungen des Barometer- und Thermometerstandes an demselben Orte bekannt, und es dürfte den Freunden meteorologischer Forschungen nicht unwillkommen seyn, diese Resultate, so wie die früheren, hier zu finden.

Die Beobachtungen *Herzberg's* wurden vom Jahre 1798 bis 1807 zu Malmanger in der Diöcese von Bergen in einer Breite von 59° 58′, und einer Höhe von 64

rheinl. Fuſs über der Meeresfläche angestellt; von 1807 an bis zum Jahre 1828 aber zu Ullenswang in einer Breite von 60° 19′, in einer Höhe von 32 rheinl. Fuſs über der Meeresfläche. Die Barometerhöhe ist in französischen Zollen ausgedrückt, und auf 0° R. reducirt. Hier folgen die Resultate der Beobachtungen:

Jahr	Barometerstand.	Thermometer nach. R.	Mittlere Temperatur der Monate Mai, Juni, Juli und August.
1798.	27 Z. 11.6 L.	+ 6.99	+ 13.3
1799.	28 » 0.2 »	6.15	11.8
1800.	27 » 10.1 »	5.84	10.9
1801.	27 » 11.5 »	6.55	12.8
1802.	27 » 11.2 »	4.85	9.5
1803.	28 » 0.1 »	4.50	10.6
1804.	27 » 11.8 »	5.30	10.8
1805.	27 » 11.9 »	5.50	11.1
1806.	27 » 11.6 »	5.27	10.9
1807.	27 » 11.5 »	5.10	11.4
1808.	28 » 0.3 »	5.72	13.0
1809.	28 » 0.4 »	5.12	12.2
1810.	28 » 0.7 »	4.96	10.6
1811.	27 » 11.8 »	6.75	12.0
1812.	28 » 0.4 »	7.70	10.3
1813.	28 » 0.5 »	6.63	12.9
1814.	28 » 0.6 »	5.50	10.9
1815.	28 » 1.1 »	5. 0	11.8
1816.	27 » 11.6 »	5. 7	12.0
1817.	27 » 11.1 »	5.96	11.2
1818.	28 » 0.1 »	6.62	12.0
1819.	28 » 0.3 »	6.50	12.8
1820.	28 » 0.9 »	5.80	11.9
1821.	27 » 11.4 »	6.10	11.0
1822.	27 » 11.9 »	6.75	12.0
1823.	27 » 11.8 »	5.64	10.7
1824.	27 » 9.5 »	6.77	11.9
1825.	28 » 0.1 »	6.69	12.5
1826.	28 » 0.7 »	6.75	12.6
1827.	27 » 11.4 »	5.60	11.3
	27 » 11.87 »	5.08	11.62

Die Temperatur der Quellen wechselt an dem Beobachtungsorte von 5° — 6° R., stimmt also mit der mittleren Temperatur der Luft nahe überein. Die geringste Jahrestemperatur herrschte in den Jahren 1802 und 1812. Merkwürdig ist es, daſs diese Jahre zugleich die unfruchtbarsten waren.

3. Mittlere Temperatur zu Penzanse. Von *Giddy.*

(Edinb. journ. of sc. N. 17.)

Thermometerbeobachtungen, die sieben Jahre lang zu Penzanse fortgesetzt wurden, geben im Durschschnitte folgende Resultate:

Jahre.	Maximum.	Minimum.	Mittlere Temp.
1821.	73° F.	26° F.	52°.5 F.
1822.	78° »	28° »	53°.0 »
1823.	70° »	27° »	51°.0 »
1824.	72° »	30° »	51°.5 »
1825.	84° »	29° »	52°.0 »
1826.	80° »	26° »	53°.5 »
1827.	73° »	24° »	51°.5 »

Also beträgt das Maximum im Durchschnitt 75° 1/2, das Minimum 25.1, und der Mittelwerth 52°.0. *Giddy* hat noch andere Beobachtungen, die von 1807 bis 1827 reichen, bekannt gemacht, und nach diesen die mittlere Temperatur gleich 54°.5 gefunden. Allein die Beobachtungen wurden nur um 8 U. früh und um 2 U. Nachmittag angestellt, und müssen daher ein Resultat geben, welches nicht als der wahre Mittelwerth der herrschenden Temperatur angesehen werden kann. *Brewster* suchte daraus den wahren Mittelwerth nach den Ergebnissen der zu Leith in den Jahren 1824, 1825 und 1826 angestell-

ten Beobachtungen. Diesen gemäſs übertrifft das Mittel aus den um 8 U. früh und um 2 U. Nachmittag angestellten Beobachtungen die wahre mittlere Temperatur des Beobachtungsortes um 2°.03. Wird diese Gröſse von obigem Resultate abgezogen, so erhält man 52°.47 als mittlere Temperatur; eine Gröſse, die mit der aus obigen Beobachtungen sich ergebenden hinreichend übereinstimmt. Berechnet man nach *Brewster's* Formel, von der schon Bd. 4, S. 337 dieser Zeitschrift die Rede war, diese Gröſse, so erhält man 52°.2.

Alphabetisches Register für die ersten fünf Bände.

Die römischen Zahlen bedeuten den Band, die arabischen die Seite des Bandes.

A.

B.

C.

D.

E.

H.

L.

M.

Q.

R.

S.

T.

U.

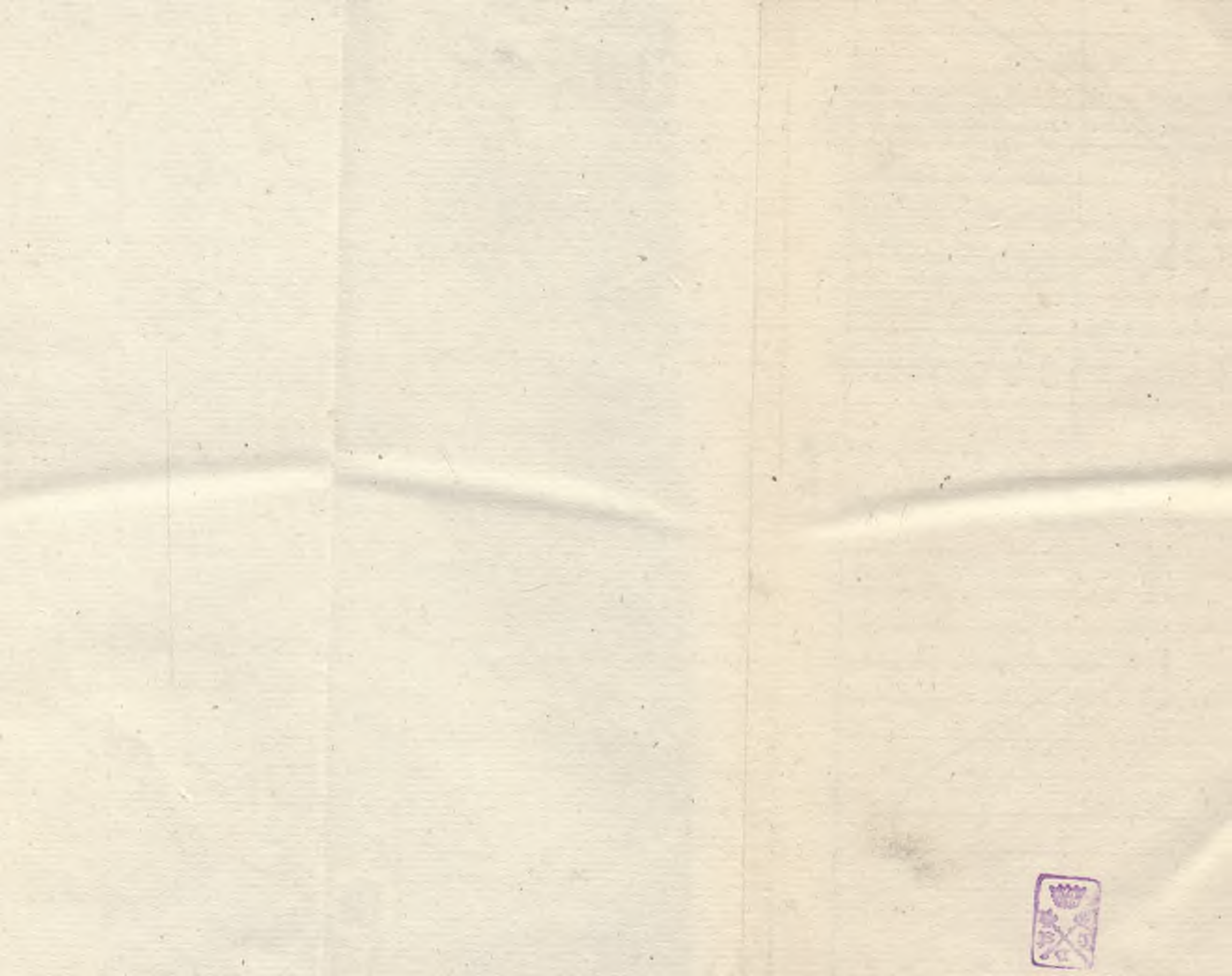
V.

W.

Y.

Z.

Fig. 14.
12 9 6 3 0 3 6 9 12 15
Fig. 13.
30 27 24 21 18 15 12 9 6 3 0 3 6 9 12 15 18 21 24



by

pod tą

wszystkie

po ten

zachowania

Dla teg

w innych rzec

dzent ma

w

pisac

e hun

prisa

reizm
afitn sous la pue
te pmy

uoon